

Introduzione all'analisi dei dati nel Laboratorio di Fisica

Paolo Fornasini

30 agosto 2023

Prefazione

Sono qui presentate le lezioni tenute a supporto di un corso di Esperimentazioni di Fisica tenuto agli studenti del primo anno del corso di laurea in Fisica dal 1994 al 2005.

Durante il corso, gli studenti eseguivano una decina di semplici esperimenti di Meccanica e Termodinamica. Gli scopi del corso erano molteplici: acquisire familiarità con il lavoro di gruppo in laboratorio, imparare a scrivere relazioni concise ed esaurienti sugli esperimenti eseguiti, ma soprattutto imparare ad analizzare e interpretare correttamente i risultati delle misurazioni. È a quest'ultimo scopo che si rivolgono le lezioni qui presentate.

La sequenza dei capitoli è studiata in funzione dalle esigenze didattiche.

Nella Prima Parte vengono presentati gli strumenti necessari ad iniziare velocemente e proficuamente l'attività di laboratorio; in particolare si introduce il concetto fondamentale di incertezza delle misure, si analizzano le sue diverse cause e si spiega come le incertezze devono essere espresse e trattate nell'analisi e interpretazione dei dati.

La Seconda Parte è dedicata agli approfondimenti matematici a supporto dei concetti introdotti nella Prima Parte: teoria delle probabilità e metodi statistici.

Le Appendici sono dedicate a Tabelle e complementi matematici.

Un approccio più sistematico all'argomento, in cui le tecniche di analisi dei dati vengono presentate solo dopo aver introdotto i concetti necessari di probabilità e statistica può essere trovato in altri testi, ad esempio, del medesimo autore di queste lezioni, "The Uncertainty in Physical Measurements", pubblicato da Springer nel 2008.

Indice

I	Grandezze fisiche, misure, incertezza	1
1	Grandezze fisiche e loro misurazione	3
1.1	Metodi di osservazione e misurazione	3
1.2	Grandezze fisiche	5
1.3	Misurazione diretta ed indiretta	6
1.4	Dipendenza dal tempo delle grandezze fisiche	8
1.5	Conteggio di eventi casuali	10
1.6	Definizione operativa delle grandezze fisiche	11
1.7	Il metodo sperimentale	11
2	Sistemi di unità di misura	13
2.1	Grandezze fondamentali e derivate	13
2.2	Campioni per le unità di misura	14
2.3	Il Sistema Internazionale	15
2.4	Altri sistemi di unità di misura	20
2.5	Analisi dimensionale	23
3	Strumenti di misura	27
3.1	Elementi funzionali	27
3.2	Classificazioni degli strumenti	29
3.3	Caratteristiche statiche degli strumenti	30
3.4	Accuratezza di uno strumento	33
3.5	Comportamento dinamico degli strumenti	35
3.6	Dispositivi di conteggio	41
4	Incertezza delle misure	43
4.1	Cause di incertezza	43
4.2	Risoluzione della misura	44
4.3	Errori casuali	46
4.4	Errori sistematici	57
4.5	Incetezza: riepilogo e confronti	62
4.6	Incetezza nelle misure indirette	67
4.7	Correlazione tra grandezze fisiche	75
II	Probabilità e statistica	83
5	Probabilità: concetti elementari	85
5.1	Fenomeni aleatori	85
5.2	Spazio campionario. Eventi.	86
5.3	Probabilità di un evento	88
5.4	Addizione e moltiplicazione di eventi	92
5.5	Probabilità della somma di eventi	94

5.6	Probabilità del prodotto di eventi	95
5.7	Tecniche di calcolo combinatorio	98
5.8	Problemi e applicazioni	100
6	Distribuzioni di variabile aleatoria	105
6.1	Distribuzione binomiale	105
6.2	Variabili aleatorie e leggi di distribuzione	109
6.3	Caratteristiche numeriche delle distribuzioni	114
6.4	Distribuzione di Poisson	120
6.5	Distribuzione normale di Gauss	126
6.6	Significato della distribuzione normale	130
6.7	Altre distribuzioni usate in Fisica	135
6.8	Distribuzioni multivariate	138
7	Trattamento statistico dei dati sperimentali	141
7.1	Popolazioni e campioni	141
7.2	Medie e varianze campionarie	145
7.3	Stima dei parametri di una popolazione	148
7.4	Incertezza e intervallo di confidenza	152
7.5	Il metodo dei minimi quadrati	157
7.6	Il test del chi quadrato	161
7.7	Propagazione dell'incertezza e indipendenza statistica: covarianza	167
7.8	Coefficiente di correlazione lineare	170
III	Appendici	172
A	Rappresentazione dei dati sperimentali	175
A.1	Cifre significative e arrotondamenti	175
A.2	Tabelle	178
A.3	Grafici	180
A.4	Istogrammi	183
B	Unità di misura	185
B.1	Sistema Internazionale (S.I.)	185
B.2	Unità di misura non ammesse dal S.I.	189
B.3	Sistemi anglosassoni	190
B.4	Sistema c.g.s. di Gauss	191
B.5	Unità non S.I. di uso corrente in Fisica	192
C	Dimostrazioni e complementi	193
C.1	Risposta dinamica degli strumenti: equazioni differenziali	193
C.2	Funzioni trasformate delle distribuzioni	196
C.3	Momenti della distribuzione binomiale	198
C.4	Momenti della distribuzione a densità uniforme	199
C.5	Momenti della distribuzione di Poisson	200
C.6	Integrale di Eulero-Poisson	201
C.7	Momenti della distribuzione normale	202
C.8	Parametri della distribuzione di Lorentz	204
C.9	Parametri della distribuzione di Maxwell-Boltzmann	204

D	Tabelle	207
D.1	Alfabeto greco	207
D.2	Alcune costanti fondamentali della fisica	207
D.3	Integrali della distribuzione normale standard	208
D.4	Integrali della distribuzione di Student	212
D.5	Integrali della distribuzione del chi quadrato	214
D.6	Integrali della distribuzione del coefficiente di correlazione	216
E	Bibliografia	219

Parte I

Grandezze fisiche, misure,
incertezza

Capitolo 1

Grandezze fisiche e loro misurazione

La grande potenza del *metodo scientifico* per lo studio dei fenomeni naturali si basa sulla possibilità di individuare alcune proprietà misurabili, che chiamiamo *grandezze fisiche*, e sulla capacità di trovare delle relazioni stabili tra i valori misurati di grandezze fisiche diverse. Ad esempio, la legge fondamentale della meccanica classica, $\vec{F} = m\vec{a}$, collega tra di loro tre grandezze fisiche: forza \vec{F} , massa m ed accelerazione \vec{a} .

In Capitolo 1 cercheremo di capire che cosa si intende in generale per *grandezza fisica*. Ad esempio, perché la *lunghezza* o la *massa* sono grandezze fisiche, mentre proprietà direttamente percepibili dai nostri sensi, come il sapore o l'odore, non lo sono?

Come vedremo, la definizione stessa delle grandezze fisiche, nonché il loro impiego pratico, sono indissolubilmente legati alla individuazione di procedure di *misurazione*. La misurazione consente di stabilire una corrispondenza tra grandezze fisiche e numeri e di applicare quindi il linguaggio ed i formalismi della matematica alla descrizione dei fenomeni naturali.

Apparirà chiaro comunque fin da questo Capitolo 1 un fatto fondamentale: qualsiasi operazione di misura implica un certo grado di *incertezza* del suo risultato. In altri termini, l'incertezza fa parte integrante di qualsiasi misura. Saper valutare correttamente l'incertezza di misura è essenziale sia in campo scientifico, per fissare i limiti di validità delle teorie con cui si descrivono i fenomeni naturali, sia in campo tecnologico, per asserire il grado di affidabilità di prodotti e procedure.

La trattazione dell'incertezza di misura e delle sue conseguenze costituisce il filo conduttore principale di questo libro.

1.1 Metodi di osservazione e misurazione

Per dare un significato concreto al concetto di *grandezza fisica*, incominciamo col prendere in considerazione diversi metodi con cui si possono studiare i fenomeni naturali, classificandoli in ordine di crescente complessità e potenza.

1.1.1 Metodo morfologico

Il metodo di studio più semplice si limita al rilievo sensoriale delle proprietà di oggetti o fenomeni ed alla loro eventuale registrazione e descrizione, tramite disegno, fotografia, etc.

Esempio: Lo studio dell'anatomia del corpo umano viene generalmente fatto mediante rappresentazioni fotografiche, disegni, filmati.

Esempio: Molte sostanze chimiche possono essere individuate, da una persona esperta, in base al colore, alla lucentezza, all'odore, al sapore, etc.

1.1.2 Metodo classificatorio

Un progresso nella descrizione del mondo naturale si ha quando è possibile realizzare una ripartizione di un insieme di oggetti o fenomeni in *classi* (sottoinsiemi privi di intersezioni ed esaurienti) secondo la rispondenza a uno o più requisiti ben definiti. Due oggetti o fenomeni appartengono alla medesima classe se e solo se godono di una o più proprietà in comune.

Esempio: Lo studio sistematico della zoologia e della botanica si basa su una complessa ed articolata classificazione del mondo animale e del mondo vegetale. Così, gli animali vertebrati vengono suddivisi in 5 classi: mammiferi, uccelli, rettili, anfibi, pesci. A sua volta ogni classe è divisa, secondo una scala gerarchica discendente, in più ordini, famiglie, specie.

Esempio: La relazione di congruenza tra segmenti considerata dalla Geometria è una relazione di equivalenza e consente quindi di suddividere i segmenti dello spazio in classi. Queste classi, interpretate come elementi di un nuovo insieme, sono chiamate *lunghezze*: segmenti congruenti hanno la medesima lunghezza, e viceversa. A questo livello di definizione la lunghezza non è comunque ancora considerata una grandezza fisica.

1.1.3 Metodo comparativo

Un ulteriore progresso nella descrizione del mondo naturale si ha quando è possibile introdurre una *relazione d'ordine*, cioè un criterio che consente di decidere in modo univoco se, dati due oggetti o fenomeni, il primo possiede una data proprietà in grado minore, uguale o maggiore del secondo. Se la relazione d'ordine gode della proprietà transitiva, si può stabilire una corrispondenza tra i gradi di quella proprietà ed un insieme di numeri, in modo tale che la relazione d'ordine sia preservata.

Una proprietà degli oggetti o dei fenomeni per la quale sia possibile introdurre un metodo comparativo è una *grandezza fisica*.

Esempio: La scala di Mohs per le durezze dei minerali è basata sul seguente criterio: il minerale A è più duro del minerale B se A scalfisce B . Il criterio stabilisce una relazione d'ordine che gode della proprietà transitiva: la *durezza* è una grandezza fisica. La scala di Mohs elenca 10 minerali in ordine di durezza crescente, associandoli a 10 numeri, pure in ordine crescente:

1 - talco	2 - gesso	3 - calcite	4 - fluorite	5 - apatite
6 - ortoclasio	7 - quarzo	8 - topazio	9 - corindone	10 - diamante

Esempio: Il confronto per sovrapposizione di due segmenti consente di decidere in modo univoco non solo se i due segmenti sono congruenti ma anche se uno è più corto dell'altro o viceversa. Il criterio del confronto tra segmenti consente di introdurre in modo operativo una relazione d'ordine per le lunghezze. La relazione d'ordine tra lunghezze gode della proprietà transitiva. Ad ogni lunghezza si può associare un numero comunque scelto purché la relazione d'ordine sia preservata. A questo punto possiamo dire che *la lunghezza è una grandezza fisica*.

Esempio: Gli *stati termici* di due oggetti A e B possono essere confrontati mettendo i due oggetti successivamente a contatto con uno stesso termoscopio (Fig. 1.1); il confronto consente di stabilire una relazione d'ordine transitiva: si dice che A ha *temperatura* più alta di B se provoca una maggiore dilatazione del mercurio nel termoscopio. Allo stato termico di ogni oggetto si può associare un numero, scelto in modo qualsiasi purché la relazione d'ordine sia preservata. La *temperatura* è una grandezza fisica.

1.1.4 Metodo quantitativo o metrico

In alcuni casi è possibile, oltre che riconoscere nell'insieme dei gradi di una proprietà una relazione d'ordine transitiva, definire anche una *legge di composizione* che goda delle stesse proprietà dell'addizione tra numeri. Si può allora stabilire una corrispondenza tra i gradi della proprietà e l'insieme dei numeri reali che riproduce non solo la relazione d'ordine, ma anche la struttura additiva.

Esempio: Una legge di composizione per le lunghezze di segmenti può essere introdotta nel modo seguente. Consideriamo due segmenti a e b , di estremi rispettivamente AA' e BB' . La

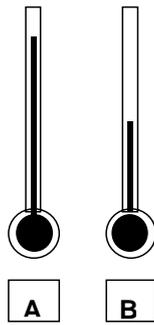


Figura 1.1: Un termoscopio a mercurio è costituito da un bulbo di vetro riempito di mercurio, in comunicazione con un sottile cannello, pure di vetro (si pensi ad un comune termometro, privo però della scala graduata).

composizione si effettua ponendo i due segmenti sulla stessa retta e facendo coincidere l'estremo A' del segmento a con l'estremo B del segmento b . Il segmento somma $a + b$ ha come estremi A e B' .

Il metodo quantitativo è alla base di gran parte delle operazioni di misura scientifiche e tecniche. Esso consente di applicare alla descrizione dei fenomeni naturali i formalismi sviluppati dalla matematica. Approfondiremo il metodo quantitativo nel § 1.3. Si noti che esistono grandezze fisiche per le quali non è possibile definire una legge di composizione che goda delle stesse proprietà dell'addizione in aritmetica. Esempi significativi sono la durezza e la temperatura.

1.1.5 Metodi statistici

Quando si studiano popolazioni molto numerose di oggetti o eventi è spesso possibile, utilizzando gli strumenti matematici della statistica, descriverne alcune proprietà medie per mezzo di pochi parametri.

Ad esempio, in Fisica i metodi statistici vengono utilizzati per interpretare le grandezze termodinamiche macroscopiche (pressione, energia interna, temperatura, etc.) in termini di comportamento medio microscopico di un numero molto elevato di atomi o molecole. Un altro campo di utilizzazione dei metodi statistici riguarda il conteggio di eventi casuali, cui accenneremo nel § 1.4. Vedremo nel Cap. 4 che i metodi statistici rivestono una notevole importanza nella misurazione delle grandezze fisiche e nella ricerca di relazioni analitiche tra grandezze diverse, in quanto forniscono gli strumenti per valutare le incertezze nei valori di misura.

1.2 Grandezze fisiche

L'analisi dei diversi metodi di osservazione e misurazione fatta al § 1.1 ci consente di chiarire cosa si intende per *grandezza fisica*.

Una *grandezza fisica* (in inglese *physical quantity*) è una proprietà di un oggetto o di un fenomeno per la quale è possibile definire una relazione d'ordine che goda della proprietà transitiva.

Per molte grandezze fisiche è possibile definire anche una legge di composizione che gode delle stesse proprietà dell'addizione tra numeri.

Le grandezze fisiche possono pertanto venire raggruppate in due categorie:

a) **Grandezze quantitative** (o **metrizzabili**)

Sono le grandezze per le quali è possibile definire sia una relazione d'ordine transitiva sia una legge di composizione additiva (metodo quantitativo o metrico del § 1.1.4).

Esempio: La lunghezza, l'intervallo di tempo, la massa, la velocità, la forza sono esempi di grandezze quantitative.

b) **Grandezze di stato (o non metrizzabili)**

Sono grandezze per le quali è possibile definire una relazione d'ordine transitiva ma non una legge di composizione additiva (metodo comparativo del § 1.1.3).

Esempio: La temperatura e la durezza sono tipici esempi di grandezze di stato.

La *misurazione* (in inglese *measurement*) è il procedimento che consente di associare ad ogni valore della grandezza fisica un numero, detto *misura* della grandezza (in inglese *measure*).

Metodologie diverse di misurazione dovranno essere utilizzate a seconda che la grandezza sia metrizzabile oppure no. Approfondiremo l'argomento nel prossimo paragrafo, § 1.3.

La realizzazione pratica della misurazione avviene per mezzo degli *strumenti di misura*. Le principali caratteristiche degli strumenti di misura verranno analizzate nel Cap. 3.

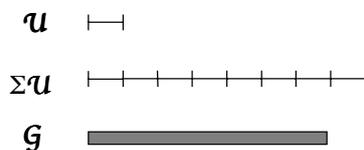
1.3 Misurazione diretta ed indiretta

Due diverse metodologie di misurazione vengono generalmente distinte: la misurazione diretta e la misurazione indiretta.

1.3.1 Misurazione diretta

Consideriamo una grandezza \mathcal{G} di tipo metrizzabile, per la quale cioè sia definita una legge di composizione additiva. Per concretezza, pensiamo ad esempio alla lunghezza di un'asta. La misurazione diretta della grandezza \mathcal{G} si può ricondurre idealmente ad una sequenza logica di azioni:

1. costruzione o scelta di un campione \mathcal{U} di unità di misura;
2. composizione di campioni: $\sum \mathcal{U}_i$;
3. verifica di identità tra \mathcal{G} e una somma $n\mathcal{U}$ di campioni;
4. computo degli n campioni.



Secondo questo schema logico, la misura $X(\mathcal{G})$ della grandezza \mathcal{G} è il rapporto tra la grandezza \mathcal{G} e l'unità di misura \mathcal{U} :

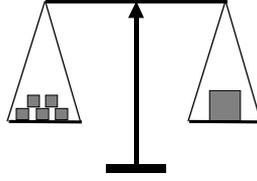
$$X(\mathcal{G}) = \mathcal{G}/\mathcal{U}. \quad (1.3.1)$$

Il risultato di una misurazione si indica pertanto così: $\mathcal{G} = X \cdot \mathcal{U}$; X è il numero che esprime la misura, \mathcal{U} è l'unità di misura; ad esempio, per una lunghezza: $d = 5$ metri; per un intervallo di tempo: $\Delta t = 7$ secondi, per una massa: $m = 2$ chilogrammi.

La misurazione diretta è la realizzazione operativa del metodo quantitativo o metrico; essa può quindi essere realizzata solo per grandezze quantitative o metrizzabili (che vengono perciò anche chiamate *grandezze direttamente misurabili*.)

Esempio: Misurazione di una lunghezza con un regolo millimetrato. Il campione è la distanza tra due tacche contigue del regolo (1 mm); la composizione dei campioni è stata effettuata una volta per tutte al momento dell'incisione delle tacche; la verifica di identità si fa ponendo in coincidenza gli estremi dell'oggetto da misurare con le tacche della riga; il computo dei campioni è facilitato dai numeri incisi sulla riga in corrispondenza di alcune tacche.

Esempio: Misurazione di una massa con una bilancia meccanica a due piatti. Il campione è un pesetto di massa unitaria; la composizione dei campioni si fa ponendo più pesetti identici su un piatto della bilancia; la verifica di identità consiste nel calibrare il numero di pesetti in modo da bilanciare la massa del corpo posto sull'altro piatto della bilancia.



1.3.2 Incertezza nella misurazione diretta

Analizziamo ora più in dettaglio il significato dell'eq.(1.3.1), partendo da considerazioni di carattere puramente matematico, per poi passare a tenere conto dei fattori sperimentali che influenzano la misurazione.

È facile rendersi conto che la grandezza \mathcal{G} solo in qualche caso corrisponderà ad un multiplo intero $n\mathcal{U}$ dell'unità di misura. Pertanto, la misura $X = \mathcal{G}/\mathcal{U}$ non è in genere un numero intero n .

Ammettendo la divisibilità dell'unità di misura \mathcal{U} in un numero comunque grande di sottomultipli, si potrebbe pensare che la misura $X = \mathcal{G}/\mathcal{U}$ possa comunque essere sempre un numero razionale m/n . È però ben noto che esistono grandezze incommensurabili (ad esempio il lato e la diagonale di un quadrato) il cui rapporto è un numero irrazionale.

Pertanto la misura di una grandezza fisica è, almeno in linea di principio, un *numero reale* r :

$$X(\mathcal{G}) = \mathcal{G}/\mathcal{U} = r. \quad (1.3.2)$$

L'eq. (1.3.2) stabilisce la corrispondenza tra grandezze fisiche e numeri reali che sta alla base dell'uso dei formalismi della matematica del continuo nella descrizione teorica di gran parte dei fenomeni fisici macroscopici.

Nella pratica sperimentale di misurazione si ha sempre a che fare con strumenti di misura in cui l'unità \mathcal{U} non può essere resa arbitrariamente piccola, per cui la verifica di identità tra la grandezza \mathcal{G} e una somma di campioni può essere fatta solo in modo approssimato. Con esattezza potremo solo decidere che

$$n\mathcal{U} < \mathcal{G} < (n+1)\mathcal{U}, \quad (1.3.3)$$

cioè stabilire un intervallo di valori di larghezza \mathcal{U} entro il quale si colloca la misura della grandezza \mathcal{G} .

In altri termini, il risultato di una misurazione diretta non è un numero, bensì un intervallo finito di possibili valori. La larghezza dell'intervallo rappresenta un'incertezza o *indeterminazione* (in inglese *uncertainty*) della misura.

In linea di principio si potrebbe pensare di ricondurre l'incertezza al di sotto di un valore comunque prefissato riducendo opportunamente l'unità di misura \mathcal{U} . Nella pratica, la riduzione dell'unità \mathcal{U} è generalmente limitata da difficoltà di natura tecnica. Inoltre, come avremo modo di vedere nel Cap. 3 e soprattutto nel Cap. 4, altre cause, legate sia a fluttuazioni di natura casuale sia ad errori di tipo sistematico nelle procedure di misurazione, possono contribuire in modo determinante all'incertezza di misura.

L'esperienza ha mostrato che l'incertezza nelle procedure di misurazione non è mai completamente eliminabile. L'incertezza è dunque parte integrante della misura e va ogni volta valutata quantitativamente con attenzione. La misura di una qualsiasi grandezza fisica deve sempre riportare l'informazione sull'entità della sua incertezza. La sua espressione sarà tipicamente del tipo

$$\mathcal{G} = (X_0 \pm \delta X)\mathcal{U}, \quad (1.3.4)$$

dove X_0 è il valore centrale della misura e δX rappresenta la semi-larghezza dell'intervallo di incertezza.

Buona parte del Cap. 4 sarà dedicata ad imparare come valutare l'incertezza di misura in diverse possibili situazioni e ad esprimerla in modo convenzionale mediante un semi-intervallo δX .

1.3.3 Misurazione indiretta

Si parla di misurazione indiretta quando la misura $X(\mathcal{G})$ della grandezza \mathcal{G} in esame viene ottenuta sfruttando relazioni analitiche che la collegano alle misure $Y(\mathcal{A})$, $Z(\mathcal{B})$, ... di altre grandezze \mathcal{A} , \mathcal{B} , ... direttamente misurabili.

La misurazione indiretta viene talora utilizzata per grandezze che sarebbero in linea di principio misurabili anche direttamente:

- a) per convenienza pratica della misurazione indiretta rispetto alla misurazione diretta;
- b) per impossibilità pratica della misurazione diretta.

Esempio: La lunghezza della diagonale d di un quadrato può essere misurata direttamente oppure indirettamente a partire dalla misura diretta del lato a attraverso la relazione $d = a\sqrt{2}$.

Esempio: La velocità è in linea di principio misurabile direttamente (almeno finché si considerano velocità molto inferiori alla velocità della luce, così da poter trascurare gli effetti relativistici). La velocità viene però generalmente misurata in modo indiretto, ad esempio come rapporto tra uno spazio e un intervallo di tempo misurati direttamente.

Esempio: Le distanze astronomiche non possono essere misurate direttamente; la loro misurazione indiretta è ricondotta alla misurazione diretta di angoli e di una distanza più piccola.

Alla misurazione indiretta si deve comunque ricorrere per le grandezze di stato o *non metrizzabili* (dette perciò anche *non direttamente misurabili*). La misurazione indiretta consente di stabilire anche per alcune grandezze non metrizzabili una corrispondenza con un insieme di numeri che riproduce la struttura additiva.

Esempio: La *temperatura* non è misurabile direttamente, in quanto non è definibile una legge di composizione per le temperature. È tuttavia possibile stabilire delle *scale termometriche* che mettono in relazione in modo convenzionale la temperatura con una grandezza misurabile direttamente (una lunghezza, una pressione, una resistenza elettrica, etc.) Ad esempio, in un termometro a mercurio, preventivamente tarato secondo la scala Celsius, la misurazione di una variazione di temperatura ΔT viene ricondotta alla misurazione diretta della variazione $\Delta \ell$ di lunghezza della colonna di mercurio.

La misurazione indiretta di una grandezza si basa sulla misurazione diretta di una o più altre grandezze. L'*incertezza*, che come abbiamo visto sopra caratterizza ogni misura ottenuta direttamente, si propaga ovviamente anche ai valori delle grandezze misurate indirettamente. La propagazione dell'incertezza nelle misure indirette sarà affrontata nel § 4.6.

1.4 Dipendenza dal tempo delle grandezze fisiche

Tra le diverse grandezze fisiche, il tempo assume spesso un ruolo privilegiato. Frequentemente infatti si presenta la necessità di seguire le variazioni di una grandezza fisica \mathcal{G} al trascorrere del tempo t , cioè di studiare l'andamento della funzione $X(t)$, dove X rappresenta la misura della grandezza \mathcal{G} e t il tempo. A seconda del tipo di dipendenza del valore X dal tempo t , è utile evidenziare alcuni casi particolari, che sono illustrati schematicamente in Fig. 1.2.

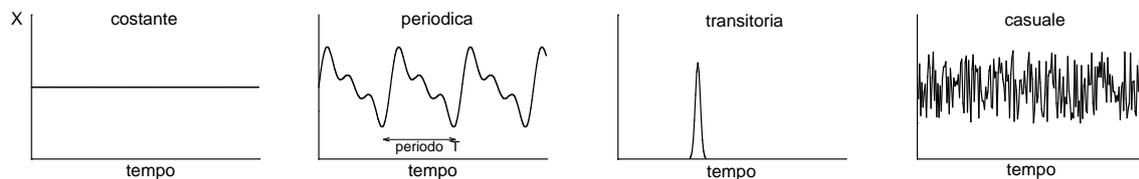


Figura 1.2: Dipendenza dal tempo delle grandezze fisiche: alcuni casi particolarmente significativi. Da sinistra verso destra: grandezza costante, periodica, transitoria, casuale.

1.4.1 Grandezze costanti

Una grandezza X si dice **costante** quando il suo valore $X(\mathcal{G})$ non cambia al trascorrere del tempo.

Esempio: La forza di interazione gravitazionale tra due corpi di masse rispettivamente m e M e di dimensioni trascurabili, posti a distanza r l'uno dall'altro, vale $F = GmM/r^2$. La costante di proporzionalità G è detta *costante gravitazionale*; il suo valore non dipende né dall'istante né dal luogo in cui è misurata. G è una *costante fondamentale della Fisica*. Il suo valore è riportato in Appendice D.2, insieme con il valore di alcune altre costanti fondamentali.

Esempio: L'accelerazione di gravità g dipende dal luogo in cui viene misurata. In un determinato luogo, tuttavia, il suo valore rimane costante nel tempo.

Esempio: Il periodo \mathcal{T} di oscillazione di un pendolo dipende dall'ampiezza dell'oscillazione (si veda la Fig. A.1 in Appendice A.3). Poiché l'ampiezza si riduce nel tempo a causa degli attriti, anche il periodo si riduce progressivamente. Tuttavia, se l'ampiezza delle oscillazioni è sufficientemente piccola, la dipendenza del periodo dall'ampiezza è debole e lo smorzamento dovuto all'attrito è lento. In queste condizioni il periodo di oscillazione viene con buona approssimazione considerato costante (*isocronismo delle piccole oscillazioni*).

1.4.2 Grandezze periodiche

Una grandezza X ha andamento **periodico** con periodo T quando, per ogni valore di t , si ha:

$$X(t + T) = X(t) \quad (1.4.1)$$

Esempio: L'angolo θ di apertura di un pendolo oscillante varia con il tempo in modo periodico. Nell'approssimazione delle piccole oscillazioni, la dipendenza dell'angolo θ dal tempo è descritta da una legge oraria sinusoidale: $\theta = \theta_0 \sin(2\pi t/\mathcal{T} + \phi_0)$, dove θ_0 è l'ampiezza dell'oscillazione, \mathcal{T} il periodo e ϕ_0 la fase iniziale a $t = 0$.

Esempio: In un motore a combustione interna, ad esempio il motore di un'automobile, la pressione dei gas all'interno della camera di scoppio varia nel tempo. Se il motore gira a regime costante, la pressione assume con buona approssimazione la stessa sequenza di valori ad ogni ciclo; la pressione dipende cioè dal tempo in modo periodico, secondo l'Eq. (1.4.1).

Nota: È l'attribuzione di un carattere periodico ad alcuni fenomeni naturali (come l'oscillazione di un pendolo o la vibrazione di un cristallo di quarzo) che consente di stabilire le procedure per la misurazione diretta della durata degli intervalli di tempo, e quindi la definizione stessa di *intervallo di tempo*.

1.4.3 Grandezze impulsive

Una grandezza ha andamento **impulsivo** o **transitorio** quando il suo valore è diverso da zero solo per un intervallo finito di tempo.

Esempio: Quando due corpi solidi (ad esempio due palle da biliardo) si urtano, si sviluppa una forza di mutua interazione che varia molto velocemente nel tempo, la cui durata è comunque limitata al brevissimo intervallo di tempo durante cui i due corpi sono a contatto. Nel caso dell'urto tra corpi solidi pertanto la forza ha carattere impulsivo.

1.4.4 Grandezze casuali

Una grandezza ha andamento **casuale** quando il suo valore varia continuamente nel tempo in modo non periodico.

Esempio: In un gas le molecole si muovono incessantemente, urtandosi reciprocamente. Ad ogni urto la velocità di una molecola cambia di direzione e modulo in modo imprevedibile. Il modulo della velocità di una molecola ha quindi un valore casuale.

Esempio: Anche il valore di grandezze fisiche macroscopiche può subire delle fluttuazioni casuali ad opera di molteplici cause. Queste fluttuazioni casuali sono generalmente di piccola entità

rispetto al valore della misura ma contribuiscono alla sua incertezza. Questo argomento sarà ripreso e approfondito al Cap. 4.

Come vedremo in seguito, la dipendenza di una grandezza fisica dal tempo condiziona notevolmente la metodologia della sua misurazione e la scelta dello strumento di misura più adatto.

Ad esempio, per misurare una grandezza costante nel tempo si ha a disposizione un tempo virtualmente illimitato; si possono ottenere misure affidabili anche con strumenti relativamente semplici sfruttando la possibilità di ripetere più volte la misurazione e modificare se necessario la metodologia. Le principali proprietà che caratterizzano uno strumento per misurazioni di grandezze costanti nel tempo verranno descritte nel Cap. 3.

Nel caso di una grandezza dipendente dal tempo, la misurazione richiede l'uso di uno strumento di misura veloce, in grado di seguire il più possibile fedelmente le variazioni della grandezza stessa. Al § 3.5 verrà fatto un breve cenno introduttivo al problema della risposta dinamica degli strumenti di misura.

1.5 Conteggio di eventi casuali

Come abbiamo visto al § 1.3.1, la misurazione diretta di una grandezza fisica si riconduce sempre ad un'operazione di *conteggio*, cioè al computo del numero n di campioni \mathcal{U} che consentono di ottenere, a meno dell'incertezza di misura, la coincidenza tra la grandezza \mathcal{G} e la somma $n\mathcal{U}$.

A titolo di esempio, consideriamo la misurazione di un intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ con un orologio in grado di scandire i secondi. L'operazione di misura consiste nel contare i secondi a partire dall'istante iniziale t_1 per finire all'istante finale t_2 . I segnali prodotti ad ogni secondo dall'orologio possono essere considerati come *eventi regolarmente equispaziati* nel tempo (Fig. 1.3, a sinistra).

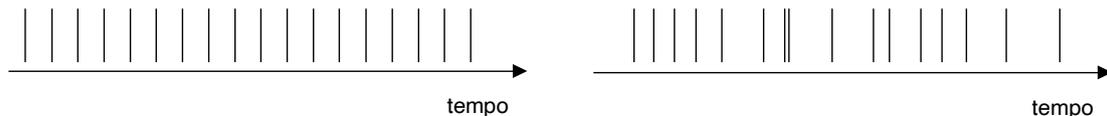


Figura 1.3: Eventi che si susseguono con regolarità nel tempo (a sinistra) ed eventi casuali (a destra).

Nella pratica di laboratorio può accadere di dover affrontare una situazione piuttosto differente, cioè il conteggio di eventi che si presentano in modo disordinato ed imprevedibile nel tempo o nello spazio (Fig. 1.3, a destra). Si tratta del conteggio di *eventi casuali*.

Un esempio tipico è rappresentato dal fenomeno dei raggi cosmici, cioè delle particelle di alta energia che continuamente arrivano dallo spazio sulla superficie terrestre. Le particelle possono essere rivelate, e quindi contate, per mezzo di opportuni strumenti, ad esempio i contatori Geiger. L'arrivo di una particella sulla finestra di ingresso di un contatore Geiger è un evento casuale nel tempo, e l'istante di arrivo è del tutto imprevedibile. La sequenza costituita dagli arrivi di più particelle è disordinata e casuale, come in Fig. 1.3, a destra). Molti altri fenomeni legati alla fisica del mondo microscopico danno origine ad eventi casuali; si pensi ad esempio al decadimento di isotopi radioattivi, all'emissione di fotoni (quanti di luce) da sorgenti di bassa intensità, alle collisioni tra particelle elementari.

La casualità dei fenomeni sembrerebbe a prima vista precludere la possibilità di un loro studio quantitativo. Tuttavia, se si effettuano conteggi di un numero sufficientemente elevato di eventi, è possibile comunque estrarre dalla loro sequenza irregolare delle *proprietà medie* regolari e significative. Queste proprietà medie rappresentano delle *grandezze fisiche*.

Esempio: Consideriamo un campione di isotopi radioattivi. Un *decadimento radioattivo* è un evento casuale, del tutto imprevedibile. Così pure casuale è la sequenza di decadimenti nel tempo, che può essere rivelata mediante opportuni strumenti contatori. Tuttavia, se si esegue un numero

sufficientemente grande di osservazioni, è possibile mettere in luce una forma di regolarità nel comportamento *medio* degli eventi casuali. Se all'istante $t = 0$ sono presenti N_0 isotopi, il loro numero si riduce nel tempo, *in media*, secondo la legge esponenziale: $N(t) = N_0 \exp(-\alpha t)$, dove α è una costante detta *costante di disintegrazione*. La costante di disintegrazione è una grandezza fisica, il cui valore caratterizza il comportamento di quel determinato isotopo.

Il conteggio di eventi casuali richiede strumentazione apposita nonché opportune tecniche statistiche di analisi dei dati, di cui ci occuperemo nei prossimi capitoli. I conteggi di eventi casuali sono intrinsecamente affetti da *incertezza*. Questa incertezza si riflette evidentemente anche sulle grandezze fisiche definite in base alle loro proprietà medie.

1.6 Definizione operativa delle grandezze fisiche

Come abbiamo visto al § 1.2, una grandezza fisica è una proprietà degli oggetti o dei fenomeni per la quale è possibile definire una relazione d'ordine transitiva (metodo comparativo) ed eventualmente anche una legge di composizione additiva (metodo quantitativo).

Al § 1.3 abbiamo anche visto che la misurazione delle grandezze fisiche si basa proprio sull'esistenza della relazione d'ordine o della legge di composizione. Ad esempio, la misurazione diretta presuppone che si conosca la ricetta pratica per aggiungere i campioni \mathcal{U} . Il concetto di grandezza fisica è quindi intrinsecamente connesso con le procedure di misurazione.

Questo modo di vedere le cose è un tipico esempio del *carattere operativo* che viene attribuito ai concetti della Fisica. Le grandezze fisiche (lunghezza, massa, tempo, forza, etc.) non vengono definite in termini di proprietà astratte, bensì in modo concreto, *operativo*: la definizione di ogni singola grandezza fisica consiste nell'enunciazione dettagliata delle operazioni che è necessario fare per misurarla.

Lo sviluppo scientifico e tecnologico ha portato ad una progressiva estensione dell'utilizzazione delle grandezze fisiche al di fuori del campo della comune esperienza quotidiana. I valori delle grandezze fisiche possono coprire molti ordini di grandezza. A titolo di esempio, consideriamo due lunghezze tipiche della fisica atomica e dell'astronomia: il raggio della prima orbita elettronica nel modello di Bohr dell'atomo di idrogeno è circa 5.3×10^{-11} m, mentre il raggio medio dell'orbita del pianeta Plutone è $5.9 \times 10^{+12}$ m.

È ovvio che né le lunghezze su scala atomica né le lunghezze di interesse astronomico possono essere misurate per confronto diretto con un campione di unità di misura. Generalizzando, una stessa grandezza fisica può richiedere tecniche di misura diverse per differenti ordini di grandezza dei suoi valori. Tecniche di misura diverse corrispondono a definizioni operative diverse. Affinché si possa comunque parlare di una medesima grandezza fisica pur in presenza di diverse definizioni operative, è necessario che le diverse definizioni operative siano tra di loro coerenti: se in un dato intervallo di valori due o più tecniche di misurazione sono possibili, esse devono fornire lo stesso risultato.

Una grandezza fisica è pertanto definita dalla classe di tutte le sue possibili definizioni operative.

1.7 Il metodo sperimentale

La Fisica non si limita alla semplice osservazione dei fenomeni naturali e alla misurazione di grandezze fisiche, in conformità ai *metodi descrittivi* presentati al § 1.1. Come abbiamo osservato all'inizio di questo capitolo, la grande potenza del metodo scientifico sta nella capacità di trovare delle correlazioni tra grandezze fisiche diverse, in modo da poter stabilire delle leggi e costruire delle teorie di validità generale.

La ricerca di correlazioni tra grandezze fisiche non è tuttavia un compito semplice. I fenomeni naturali si presentano generalmente in forme complesse, caratterizzate dalla compresenza e mutua influenza di molti fattori: si pensi solo all'effetto degli attriti, che per molti secoli ha impedito di individuare la relazione di proporzionalità tra forza e accelerazione che sta alla base della meccanica classica. Molti fenomeni importanti addirittura sfuggono alla percezione sensoriale

diretta e possono venire rivelati solo mediante strumentazione opportuna (si pensi ai fenomeni elettromagnetici).

La ricerca di correlazioni tra grandezze fisiche si basa sul *metodo sperimentale*, introdotto da Galileo Galilei (1564–1642). Il ricercatore non si limita all'osservazione passiva dei fenomeni naturali, bensì li riproduce in forma controllata in laboratorio, modificando sistematicamente i diversi fattori che ne influenzano lo svolgimento. È così possibile ridurre o addirittura eliminare fattori che si ritengono secondari ed isolare gli aspetti fondamentali di un fenomeno. Si arriva in tal modo all'enunciazione di semplici relazioni empiriche tra grandezze fisiche. Ad esempio, la progressiva riduzione dell'effetto dell'attrito su un corpo in moto lungo un piano inclinato ha portato Galileo Galilei ad intuire e quindi ipotizzare la relazione di proporzionalità tra forza ed accelerazione.

Le relazioni tra grandezze fisiche stabilite sperimentalmente sono la base per lo sviluppo delle teorie scientifiche. Le teorie scientifiche consentono di fare previsioni sull'evoluzione di fenomeni più complessi. La validità di ogni teoria scientifica è corroborata dalla verifica sperimentale delle sue previsioni.

Il metodo sperimentale si basa ovviamente su una scelta oculata delle grandezze fisiche utilizzate per descrivere i fenomeni naturali ed una loro rigorosa definizione operativa. Richiede però anche il senso critico, l'abilità tecnica, la fantasia necessarie per ricercare correlazioni semplici e riproducibili tra grandezze fisiche.

È fondamentale, per il ricercatore, essere capace di valutare correttamente l'affidabilità dei suoi risultati. Come abbiamo già accennato nei paragrafi precedenti e come vedremo approfonditamente nei prossimi capitoli, la misura di qualsiasi grandezza fisica è comunque affetta da incertezza, attribuibile alle prestazioni degli strumenti di misura e alle metodologie del loro impiego. Questa incertezza si riflette sulle leggi che esprimono le correlazioni tra grandezze fisiche, e quindi sulle teorie scientifiche che ne derivano.

Dalla affidabilità delle misure dipendono in ultima analisi i limiti di validità delle teorie scientifiche nonché delle loro conseguenze di rilevanza tecnologica.

Capitolo 2

Sistemi di unità di misura

In questo Capitolo studieremo come le grandezze fisiche vengono organizzate in *Sistemi di unità di misura*. Ci occuperemo principalmente del *Sistema Internazionale* (S.I.), ma vedremo anche altri sistemi che vengono talora utilizzati in campi specialistici della Fisica. Introdurremo infine le *dimensioni* delle grandezze fisiche e accenneremo alle principali applicazioni dell'*analisi dimensionale*.

2.1 Grandezze fondamentali e derivate

Come abbiamo visto al § 1.3, alla base di ogni operazione di misura sta la possibilità che alcune grandezze (le grandezze quantitative o metrizzabili) siano misurate in modo diretto per confronto con un campione \mathcal{U} , che definisce l'*unità di misura*.

Nella descrizione del mondo fisico vengono introdotte molte grandezze fisiche, metrizzabili e non, collegate tra loro da relazioni analitiche. In linea di principio, è del tutto lecito scegliere per ogni grandezza un'unità di misura arbitraria. Ciò porta però in genere all'introduzione di scomodi fattori di proporzionalità, oltre alla necessità di definire e mantenere un grande numero di campioni di unità di misura.

Esempio: Consideriamo tre grandezze, la lunghezza ℓ , il tempo t e la velocità v , che indicheremo provvisoriamente con i simboli \mathcal{G}_ℓ , \mathcal{G}_t e \mathcal{G}_v . Per un moto uniforme la velocità è definita come

$$\mathcal{G}_v = \Delta\mathcal{G}_\ell / \Delta\mathcal{G}_t.$$

In linea di principio è possibile scegliere in modo indipendente le unità di misura \mathcal{U} per le tre grandezze. Una scelta possibile potrebbe essere:

- per la lunghezza ℓ , $\mathcal{U}_\ell =$ raggio terrestre;
- per il tempo t , $\mathcal{U}_t =$ periodo di rotazione terrestre;
- per la velocità v , $\mathcal{U}_v =$ velocità tangenziale all'Equatore

Passiamo ora dalle grandezze \mathcal{G} alle loro misure X usando l'eq. (1.3.1): $\mathcal{G} = X\mathcal{U}$. La velocità è per definizione il rapporto tra uno spazio ed un intervallo di tempo. Con la scelta indipendente delle unità di misura fatta sopra, la misura della velocità sarà legata alle misure di spazio e tempo dalla relazione

$$X_v = (1/2\pi) X_\ell / X_t.$$

Infatti, un punto fisso sull'Equatore si muove con velocità unitaria $\mathcal{G}_v = 1 \mathcal{U}_v$, percorrendo la distanza $\mathcal{G}_\ell = 2\pi\mathcal{U}_\ell$ nel tempo unitario $\mathcal{G}_t = 1 \mathcal{U}_t$.

Nell'esempio precedente, l'unità di velocità è legata alle unità di spazio e di tempo mediante il fattore $(1/2\pi)$. Per evitare, o almeno ridurre, la necessità di fattori moltiplicativi diversi da 1 nelle formule che collegano le unità di misura di grandezze fisiche diverse, risulta conveniente scegliere

in modo arbitrario l'unità di misura solo per un numero molto piccolo di grandezze. Per le altre grandezze l'unità di misura verrà definita in modo univoco mediante relazioni analitiche.

Esempio: Scegliamo come unità di misura arbitrarie: il *metro* (m) per le lunghezze ℓ e il *secondo* (s) per i tempi t ; allora l'unità di velocità v sarà il *metro al secondo* (m/s), definito dalla relazione $v = \ell/t$.

Si chiamano:

- **Grandezze fondamentali** (in inglese *base quantities*) le grandezze per le quali l'unità di misura è definita in modo arbitrario.
- **Grandezze derivate** (in inglese *derived quantities*) le grandezze per le quali l'unità di misura è definita tramite le relazioni analitiche che le collegano alle grandezze fondamentali.

Costruire un **SISTEMA DI UNITÀ DI MISURA** significa essenzialmente:

- scegliere una determinata ripartizione delle grandezze fisiche tra fondamentali e derivate;
- definire le unità di misura e gli eventuali campioni delle grandezze fondamentali.

Il primo tentativo di costruire un sistema di unità di misura per la meccanica fu avviato dal governo rivoluzionario in Francia nel 1790 e condusse all'introduzione per legge del *Sistema Metrico Decimale* nel 1795. In seguito, vari altri sistemi di unità di misura sono stati introdotti, alcuni dei quali tuttora in uso nella scienza, nella tecnica, nelle attività commerciali. Le crescenti necessità di standardizzazione legate all'incremento degli scambi commerciali e allo sviluppo della ricerca scientifica hanno portato, a partire dal 1895 (*Convenzione del metro*), alla stipula di varie convenzioni internazionali per l'unificazione dei sistemi. Negli ultimi anni si è realizzata la convergenza verso un ben definito sistema, il *Sistema Internazionale* (S.I.), di cui parleremo in dettaglio nel § 2.3.

Un sistema di unità di misura è detto:

- *completo* se tutte le grandezze fisiche si possono ricavare dalle grandezze fondamentali tramite relazioni analitiche;
- *coerente* se le relazioni analitiche che definiscono le unità delle grandezze derivate non contengono fattori di proporzionalità diversi da 1;
- *decimale* se multipli e sottomultipli delle unità di misura sono tutti potenze di 10.

2.2 Campioni per le unità di misura

Le unità di misura delle grandezze fondamentali sono realizzate mediante *campioni* (in inglese *measurement standards*). Esistono campioni di unità di misura anche per molte grandezze derivate. Le proprietà principali che caratterizzano un campione sono:

- a) *precisione*;
- b) *invariabilità* (nel tempo);
- c) *accessibilità*, ossia possibilità di accesso al campione per chiunque ne abbia necessità;
- d) *riproducibilità*, ossia possibilità di riprodurre il campione qualora dovesse andare distrutto.

Si distinguono due tipi fondamentali di campioni:

- a) **Campioni naturali**, la cui definizione fa riferimento a fenomeni naturali.
- b) **Campioni artificiali**, costruiti appositamente.

Esempio: Ricordiamo l'evoluzione nel tempo del campione di metro. Il metro venne introdotto nel 1795 come la frazione $(1/10^7)$ dell'arco di meridiano terrestre dal polo all'equatore (campione naturale). Nel 1799 venne costruito un campione artificiale costituito da un regolo in platino,

Tabella 2.1: Grandezze fondamentali del S.I., loro unità di misura e relativi simboli.

<i>Grandezza</i>	<i>Unità</i>	<i>Simbolo</i>
intervallo di tempo	secondo	s
lunghezza	metro	m
massa	chilogrammo	kg
quantità di materia	mole	mol
temperatura	kelvin	K
intensità di corrente elettrica	ampere	A
intensità luminosa	candela	cd

il *metro legale di Fortin* (precisione $10 \div 20 \mu\text{m}$). Nel 1889 si introdusse un nuovo campione artificiale, costituito da una sbarra in lega 90% platino + 10% iridio (precisione $0.2 \mu\text{m}$). Nel 1960 si tornò ad un campione naturale, il *metro ottico*, definito come un multiplo della lunghezza d'onda della luce rosso-arancione emessa dall'isotopo 86 del kripton (precisione $0.01 \mu\text{m}$). Nel 1983 si è introdotta una definizione del metro basata sul prodotto della velocità della luce per un intervallo di tempo. Come vedremo più avanti, dal 2019 il metro è riferito al valore di alcune costanti fondamentali della Fisica, assunte come esatte.

I campioni naturali assicurano la riproducibilità e l'invariabilità, anche se talora a scapito dell'accessibilità.

I campioni di maggior precisione per una data grandezza sono detti *campioni primari* (in inglese *primary standards*). Vengono in genere realizzati anche campioni più accessibili, seppure meno precisi, detti *campioni secondari* (*secondary standards*). I campioni secondari vengono periodicamente calibrati per confronto con i campioni primari. I campioni di uso corrente, detti *campioni di lavoro* (*working standards*) vengono a loro volta calibrati per confronto con i campioni secondari.

2.3 Il Sistema Internazionale

Il Sistema Internazionale di unità di misura (S.I.) è stato introdotto nel 1960 dalla XI Conferenza Generale dei Pesi e Misure e perfezionato dalle Conferenze successive. Il S.I. è oggetto di direttive della Comunità Europea fin dal 1971, ed è stato legalmente adottato in Italia nel 1982.

Il Sistema Internazionale è:

- completo
- coerente
- decimale (tranne che per la misura degli intervalli di tempo)

Il S.I. opera una precisa ripartizione tra *grandezze fondamentali* e *grandezze derivate* ed assegna ad ogni grandezza un'unità di misura (vedi § B.1.1 e B.1.2).

Il S.I. codifica anche le norme di scrittura dei nomi e dei simboli delle grandezze fisiche nonché l'uso dei prefissi moltiplicativi secondo multipli di 1000 (vedi § B.1.4 e B.1.5).

2.3.1 Grandezze fondamentali

Il Sistema Internazionale (S.I.) è basato su 7 grandezze fondamentali, di cui riportiamo unità di misura e relativi simboli nella tabella 2.1:

Nel 2018, la 26ma CGPM ha introdotto un nuovo approccio per la definizione delle unità delle grandezze fondamentali, con effetto da maggio 2019.

In questo nuovo approccio, sette costanti della Fisica sono state assunte come *costanti di definizione*, ed i loro valori sono ora considerati come invariabili e privi di incertezza (tabella 2.2).

Le unità delle sette grandezze fondamentali sono definite con riferimento ai valori delle sette costanti di definizione.

Tabella 2.2: Costanti di definizione del S.I. e loro valori esatti

<i>Costante</i>	<i>Simbolo</i>	<i>Valore</i>	<i>Unità</i>
Frequenza della transizione del ^{133}Cs	ν_{Cs}	9 192 631 770	s^{-1}
Velocità della luce nel vuoto	c	299 792 458	m s^{-1}
Costante di Planck	h	$6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$	J s
Carica elementare	e	$1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$	C
Costante di Boltzmann	k_B	$1.380\,649 \times 10^{-23}$	J K^{-1}
Costante di Avogadro	N_A	$6.022\,140\,76 \times 10^{23}$	mol^{-1}
Efficacia luminosa	K_{cd}	683	lm W^{-1}

Il campione primario di una data grandezza fondamentale può venire realizzato nella pratica con qualsiasi metodo in grado di derivare il suo valore in funzione dei valori di alcune delle costanti di definizione.

Questo approccio garantisce la possibilità di modificare nel tempo i campioni primari seguendo gli avanzamenti scientifici e tecnologici.

Vediamo ora in dettaglio le definizioni delle unità di misura delle sette grandezze fondamentali del S.I.

Per ogni grandezza riporteremo prima, in carattere normale, la nuova definizione, valida a partire dal 2019, poi, in carattere corsivo, la definizione del campione primario utilizzata prima del 2019. Dopo ogni definizione sono commentate le proprietà del campione primario.

Intervallo di tempo

Il secondo è definito attribuendo il valore esatto $9\,192\,631\,770\,\text{s}^{-1}$ alla frequenza ν_{Cs} della radiazione emessa dall'atomo di Cesio 133 nella transizione tra i due livelli iperfini ($F=4, M=0$) e ($F=3, M=0$) dello stato fondamentale $^2S_{1/2}$.

Il secondo (s) è la durata di 9 192 631 770 oscillazioni della radiazione emessa dall'atomo di cesio 133 (^{133}Cs) nella transizione tra i due livelli energetici iperfini ($F=4, M=0$) e ($F=3, M=0$) dello stato fondamentale $^2S_{1/2}$.

L'isotopo ^{133}Cs ha un nucleo formato da 55 protoni e 78 neutroni. Lo *stato fondamentale* è lo stato in cui un atomo ha la configurazione elettronica di minima energia. La suddivisione dello stato fondamentale in *livelli iperfini* è dovuta all'interazione degli elettroni con il momento magnetico del nucleo; la differenza in energia ΔE tra i livelli iperfini è molto piccola rispetto alla differenza in energia tra i livelli principali dell'atomo.

Durante la transizione tra due livelli di energia (Fig. 2.1) l'atomo emette onde elettromagnetiche di frequenza $\nu = \Delta E/h$, corrispondente ad una lunghezza d'onda $\lambda = c/\nu$ e un periodo $T = 1/\nu$; h è la costante di Planck e c è la velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto (sono due delle costanti di definizione elencate in Tab. 2.2). La radiazione emessa dal ^{133}Cs durante la transizione in questione ha frequenza $\nu \simeq 10^{10}$ Hz e lunghezza d'onda $\lambda \simeq 3$ cm (regione delle micro-onde). Il secondo è pertanto definito come un multiplo intero del periodo $T = 1/\nu$ della radiazione emessa dal cesio.

Il campione primario del secondo è costituito da un *orologio al cesio*. Un orologio al cesio può commettere un errore massimo relativo di 1×10^{-12} , equivalente a $1\,\mu\text{s}$ ogni 12 giorni.

Lunghezza

Il metro è la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo di $1/299\,792\,458$ di secondo.

Il metro (m) è definito come la distanza percorsa nel vuoto dalla luce nell'intervallo di tempo di $1/299\,792\,458$ secondi.

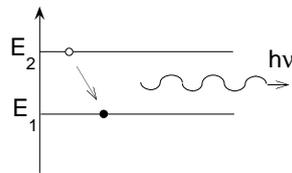


Figura 2.1: Rappresentazione schematica della transizione di un atomo da un livello di energia più alta ad un livello di energia più bassa, con conseguente emissione di radiazione elettromagnetica.

La velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto (*velocità della luce*) è una delle costanti di definizione. Già con la definizione del metro introdotta nel 1983, il suo valore era stato assunto come esatto e immodificabile.

Per la realizzazione pratica del campione di metro, è raccomandato l'uso della radiazione monocromatica emessa da un laser ad elio-neon nella regione del rosso visibile (lunghezza d'onda $\lambda = 633 \text{ nm}$).

Massa

Il chilogrammo è definito attribuendo un valore esatto alla costante di Planck h , alla velocità della luce nel vuoto c e alla frequenza ν_{Cs} del cesio.

Il chilogrammo (kg) è la massa del prototipo di platino-iridio conservato nel padiglione del B.I.P.M. (Bureau International des Poids et Mesures) di Breteuil, a Sèvres.

Il chilogrammo è l'unico campione primario artificiale del SI. Si tratta di un cilindro di platino-iridio di 38 mm di diametro e di altezza, custodito in una tripla teca sotto vuoto insieme ad altre 6 copie di riscontro. La precisione relativa del campione è dell'ordine di 10^{-9} .

Quantità di materia

La mole è la quantità di sostanza che contiene esattamente il numero di Avogadro $N_A = 6.022\,140\,76 \times 10^{23}$ entità elementari. Quando si usa la mole, deve essere specificata la natura delle entità elementari, che possono essere atomi, molecole, ioni, elettroni, altre particelle o gruppi specificati di tali particelle.

La mole (mol) è la quantità di sostanza di un sistema che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi in 0.012 kg di carbonio 12 (^{12}C).

Il ^{12}C è l'isotopo più abbondante del carbonio: il nucleo atomico è composto da 6 protoni e 6 neutroni.

Temperatura

Il kelvin è definito in relazione al valore esatto della costante di Boltzmann k_B .

Il kelvin è la frazione 1/273.16 della temperatura termodinamica del punto triplo dell'acqua.

Si chiama *punto triplo* di una sostanza lo stato termodinamico in cui sono in equilibrio le tre fasi liquida, solida e gassosa (Fig. 2.3.1). Il punto triplo dell'acqua si verifica ad una pressione di 610 Pa e (per definizione) ad una temperatura di 273.16 K, pari a 0.01°C . La precisione relativa della determinazione della temperatura del punto triplo dell'acqua è di circa 1×10^{-6} .

Si ricordi che la temperatura è una grandezza non metrizzabile, per la quale non è possibile definire un'operazione di addizione. La temperatura non si può quindi misurare direttamente addizionando repliche di un campione di unità di misura.

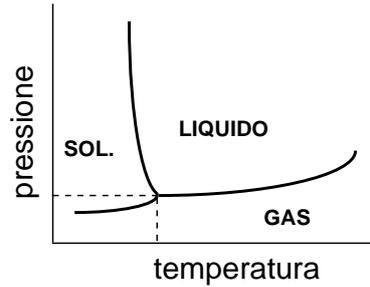


Figura 2.2: Andamento schematico del diagramma di stato dell'acqua nel piano temperatura-pressione. Ad ogni punto del piano, cioè ad ogni coppia di valori (T, p) , corrisponde uno stato termodinamico dell'acqua. Le tre regioni del piano corrispondono ai tre stati di aggregazione: solido, liquido, gas. Le linee rappresentano stati in cui coesistono all'equilibrio due stati di aggregazione. La loro intersezione è il *punto triplo*.

La *temperatura termodinamica assoluta* è definita in relazione al rendimento di un ciclo termodinamico ideale, il ciclo di Carnot; la sua misurazione è ricondotta alla misurazione di un rapporto tra quantità di calore, o più in generale di un rapporto tra valori di una grandezza metrizzabile.

Intensità di corrente elettrica

L'ampere è la corrente che corrisponde al flusso di 1 C (unità di carica) al secondo, cioè di $1/e = 1/1.602\ 176\ 634 \times 10^{-19}$ cariche elementari al secondo.

L'ampere è la corrente elettrica costante che, fluendo in due conduttori rettilinei, paralleli, indefinitamente lunghi, di sezione circolare trascurabile, posti a distanza di 1 m nel vuoto, determina tra essi una forza di 2×10^{-7} N per metro di conduttore.

Il vecchio campione primario dell'ampere era definito con riferimento alla legge che dà la forza di interazione F tra due conduttori paralleli di lunghezza ℓ posti a distanza d e percorsi rispettivamente dalle correnti I_1 e I_2 :

$$F = 2k_m I_1 I_2 \frac{\ell}{d},$$

imponendo alla costante k_m il valore numerico 10^{-7} . In genere k_m viene espresso in funzione della permeabilità magnetica del vuoto μ_0 : $k_m = \mu_0/4\pi$.

Nella pratica si preferisce far ricorso alla legge di Ohm $I = V/R$ e realizzare l'unità di corrente (ampere) come rapporto tra le unità di differenza di potenziale (volt) e di resistenza (ohm). I campioni del volt e dell'ohm sono oggi realizzati ricorrendo a due fenomeni quantistici, rispettivamente l'effetto Josephson e l'effetto Hall quantistico.

Intensità luminosa

La candela (cd) è definita prendendo il valore numerico dell'efficienza luminosa della radiazione monocromatica di frequenza 540×10^{12} Hz, K_{cd} , pari a 683 quando espresso in unità $\text{cd sr kg}^{-1} \text{m}^{-2} \text{s}^{-3}$.

La candela è l'intensità luminosa, in una data direzione, di una sorgente che emette una radiazione monocromatica di frequenza 540×10^{12} Hz e la cui intensità energetica in tale direzione è di $(1/683)$ W/sr.

L'intensità luminosa è la grandezza fondamentale della *fotometria*, cioè della disciplina che si occupa dello studio della radiazione elettromagnetica nel campo di sensibilità dell'occhio umano (luce visibile). L'intensità luminosa corrisponde al flusso di energia irradiata da una sorgente

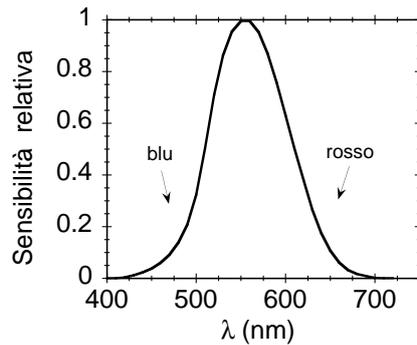


Figura 2.3: Curva della sensibilità media dell'occhio umano in funzione della lunghezza d'onda della radiazione elettromagnetica. La curva definisce la regione della *luce visibile*. Il massimo della sensibilità corrisponde ad una lunghezza d'onda $\lambda = 556 \times 10^{-9}$ m, pari ad una frequenza $\nu = 540 \times 10^{12}$ Hz.

nell'angolo solido unitario, misurata in base alla sensazione visiva, cioè pesata dalla curva media di sensibilità dell'occhio umano (Fig. 2.3). Le misure fotometriche, che si eseguono mediante strumenti appositamente costruiti, detti fotometri, sono rilevanti nei campi dell'astronomia, della fotografia, delle tecniche di illuminazione.

2.3.2 Grandezze derivate

Le unità di misura delle grandezze derivate si ottengono mediante semplici operazioni aritmetiche a partire dalle unità di misura delle grandezze fondamentali. Non esistono fattori di conversione diversi da uno (il S.I. è coerente). Le unità di misura di alcune grandezze derivate sono dotate di nome proprio.

Le unità di misura di alcune grandezze derivate dotate di nome proprio sono elencate nel § B.1.2.

Esempio 1: L'*accelerazione* è una grandezza derivata. Per definizione l'accelerazione è il rapporto tra una velocità ed un tempo, cioè tra uno spazio ed il quadrato di un tempo. La sua unità di misura, priva di nome proprio, è 1 m s^{-2} .

Esempio 2: L'*angolo piano* e l'*angolo solido* sono grandezze derivate, definite rispettivamente come il rapporto tra due lunghezze e il rapporto tra una superficie e il quadrato di una lunghezza. Le loro unità di misura sono dotate di nome proprio, rispettivamente *radiante* e *steradiano*. Il *radiante* (rad) è l'angolo piano che sottende, su una circonferenza centrata nel suo vertice, un arco di lunghezza uguale al raggio. Lo *steradiano* (sr) è l'angolo solido che sottende, su una sfera centrata nel suo vertice, una calotta sferica di area uguale al quadrato del raggio.

Esempio 3: La *forza* F è una grandezza derivata. Attraverso la legge fondamentale della dinamica, $F = ma$, l'unità di misura della forza è ricondotta alle unità di misura della massa e dell'accelerazione. L'unità di misura della forza è dotata di nome proprio, il *newton* (N), ed è definita come $1 \text{ N} = 1 \text{ Kg m s}^{-2}$.

Può valer la pena, a questo punto, tornare sul problema della ripartizione delle grandezze fisiche in fondamentali e derivate. La scelta del numero di grandezze da considerare fondamentali, in linea di principio puramente convenzionale, è guidata da criteri di praticità e semplicità, e talora anche da motivi storici.

Come abbiamo visto, il S.I. considera 3 grandezze fondamentali per la meccanica (spazio, tempo e massa).

Sarebbe possibile scegliere 4 grandezze fondamentali anziché 3. Ad esempio, a spazio, tempo e massa si potrebbe aggiungere come fondamentale la forza, con un'unità di misura definita arbitrariamente. La legge fondamentale della dinamica dovrebbe essere espressa come $F = kma$, con l'aggiunta cioè di una costante moltiplicativa dimensionale k .

Alternativamente, si potrebbero anche ridurre a 2 le grandezze fondamentali della meccanica. Ad esempio, consideriamo la legge della gravitazione universale $ma = GmM/r^2$ (dove si è posto $F = ma$). Se si impone che la costante gravitazionale G sia adimensionale e assuma il valore 1, si ottiene un vincolo tra le tre grandezze spazio, tempo e massa, per cui la scelta arbitraria delle unità di misura di due delle tre grandezze implica la determinazione dell'unità di misura della terza.

Queste ultime considerazioni, di scarsa rilevanza pratica se ci si limita alla meccanica, sono invece importanti nel campo dell'elettromagnetismo, per comprendere la differenza tra il S.I. e i sistemi c.g.s., come vedremo al § B.4.

2.3.3 Enti normativi

Le ricerche sul continuo aggiornamento del S.I. sono affidate all'*Ufficio Internazionale dei Pesi e Misure* (B.I.P.M., *Bureau International des Poids et Mesures*) con sede a Sèvres, presso Parigi. Il B.I.P.M. è controllato dalla *Conferenza Generale dei Pesi e Misure* (C.G.P.M.), che si riunisce di regola ogni 4 anni. Le decisioni della C.G.P.M. vengono rese operative dal *Comitato Internazionale dei Pesi e Misure* (C.I.P.M.).

Un ente internazionale che svolge un ruolo notevole per l'unificazione di norme e procedure in campo scientifico e tecnologico, incluse le norme relative al Sistema Internazionale, è l'*International Organisation for Standardisation* (I.S.O.). Negli Stati Uniti d'America un ruolo analogo è svolto dal *National Institute of Standards and Technologies* (N.I.S.T.), noto in passato come *National Bureau of Standards* (N.B.S.).

In Italia la divulgazione e il controllo dell'applicazione del S.I. sono affidati all'*Ente Nazionale per l'Unificazione* (U.N.I.). I campioni nazionali delle unità di misura sono realizzati in parte presso l'*Istituto Nazionale di Ricerca Metrologica* (INRIM), con sede a Torino.

2.4 Altri sistemi di unità di misura

In aggiunta al S.I., sono tuttora in uso altri sistemi di unità di misura. Ci limiteremo in questo paragrafo ad alcuni aspetti rilevanti per le applicazioni fisiche.

2.4.1 Sistemi c.g.s.

Nei sistemi c.g.s. le unità fondamentali della meccanica sono il centimetro, il grammo e il secondo. Per quanto riguarda la meccanica, quindi, le differenze tra S.I. e c.g.s. si limitano a fattori potenze di 10 nei valori delle grandezze fondamentali e derivate, nonché ai nomi delle unità di misura (si veda in proposito il § B.4).

La differenza sostanziale tra i sistemi c.g.s. e il Sistema Internazionale riguarda le grandezze elettromagnetiche. Mentre il S.I. introduce una grandezza fondamentale per l'elettromagnetismo (l'intensità di corrente), nei sistemi c.g.s. le grandezze elettromagnetiche sono tutte derivate da quelle meccaniche. Storicamente si sono sviluppati vari sistemi c.g.s., a seconda della legge utilizzata per definire le grandezze elettromagnetiche in funzione delle grandezze meccaniche.

Per chiarire le differenze tra i diversi sistemi, consideriamo le tre leggi: di Coulomb, dell'interazione elettrodinamica tra correnti e dell'induzione elettromagnetica:

$$F_e = K_e \frac{q_1 q_2}{r^2}; \quad F_m = 2 K_m I_1 I_2 \frac{\ell}{d}; \quad f = -K_i \frac{d\Phi_B}{dt};$$

le prime due leggi collegano grandezze elettriche (carica elettrica q o corrente elettrica I) a grandezze meccaniche (forze F e lunghezze r , ℓ , d), la terza collega una grandezza elettrica (la forza elettromotrice f) ad una grandezza magnetica (il flusso Φ del campo d'induzione \vec{B}). Le costanti K_e e K_m devono in ogni caso essere legate dalla relazione $K_e/K_m = c^2$, dove c è la velocità della luce nel vuoto.

Il **Sistema Internazionale** usa la legge dell'interazione elettrodinamica per definire l'intensità di corrente come grandezza fondamentale; le tre costanti K_e, K_m, K_i valgono rispettivamente

$$K_e = 1/(4\pi\epsilon_0); \quad K_m = \mu_0/(4\pi); \quad K_i = 1$$

Il **Sistema c.g.s. elettrostatico** ricava l'unità di carica elettrica (lo *statcoulomb*) dalla legge di Coulomb imponendo che la costante K_e sia adimensionale ed abbia il valore 1; le tre costanti K_e, K_m, K_i valgono rispettivamente

$$K_e = 1; \quad K_m = 1/c^2; \quad K_i = 1$$

Il **Sistema c.g.s. elettromagnetico** ricava l'unità di corrente (l' *abampere*) dalla legge dell'interazione elettrodinamica imponendo che la costante K_m sia adimensionale ed abbia il valore 1. L'unità di carica del sistema cgs elettromagnetico (l' *abcoulomb*) è diversa da quella del sistema cgs elettrostatico per un fattore c . Le tre costanti K_e, K_m, K_i valgono rispettivamente

$$K_e = c^2; \quad K_m = 1; \quad K_i = 1.$$

Il **Sistema c.g.s. simmetrizzato di Gauss** adotta le unità del sistema c.g.s. elettrostatico per le grandezze elettriche, le unità del sistema c.g.s. elettromagnetico per le grandezze magnetiche. In alcune equazioni che collegano grandezze elettriche e magnetiche compare come coefficiente la velocità della luce nel vuoto, c . Le tre costanti K_e, K_m, K_i valgono rispettivamente

$$K_e = 1; \quad K_m = 1/c^2; \quad K_i = 1/c.$$

Il sistema cgs simmetrizzato è frequentemente usato nel campo della fisica teorica. Non trova invece applicazione in campo sperimentale.

Esempio: Nel modello di Bohr per l'atomo di idrogeno, lo stato fondamentale, cioè lo stato di minima energia, corrisponde ad un'orbita circolare dell'elettrone, di raggio a_0 . Il valore approssimato di a_0 è espresso rispettivamente, nel S.I. e nel sistema di Gauss, come

$$a_0 = 4\pi\epsilon_0 \frac{\hbar}{m_e e^2} = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m} \quad (\text{S.I.})$$

$$a_0 = \frac{\hbar}{m_e e^2} = 5.29 \times 10^{-9} \text{ cm} \quad (\text{Gauss})$$

dove con il simbolo \hbar (*acca tagliato*) si indica la costante di Planck divisa per 2π : $\hbar = h/2\pi$; m_e ed e sono rispettivamente la massa e la carica elettrica dell'elettrone (i valori numerici delle costanti sono riportati al § D.2).

Nota: Il S.I. è razionalizzato, il sistema di Gauss non è razionalizzato. Un sistema di misura si dice *razionalizzato* quando i coefficienti numerici che compaiono nelle leggi sono scelti in modo che il numero irrazionale π compaia solo in formule relative a simmetrie circolari, sferiche o cilindriche e non in quelle relative a simmetrie piane. La razionalizzazione del S.I. per le formule dell'elettromagnetismo è ottenuta esplicitando il fattore 4π nella legge di Coulomb.

Al § B.4 sono riportate alcune tabelle che facilitano la conversione tra sistema c.g.s. di Gauss e S.I.

2.4.2 Sistemi pratici

Varie unità di misura *pratiche* estranee al S.I. sono tuttora in uso. Salvo poche eccezioni limitate a campi specialistici ammesse dal Comitato Internazionale dei Pesi e Misure (§ B.1.3), le unità *pratiche* non dovrebbero più essere usate (un elenco parziale è riportato al § B.2).

Tra le unità di misura non S.I. ammesse all'uso alcune sono frequentemente utilizzate in Fisica.

Un'unità di massa atomica (u), in inglese *atomic mass unit* (amu) è 1/12 della massa di un atomo di carbonio 12, cioè dell'isotopo del carbonio il cui nucleo contiene 12 nucleoni (6 protoni e 6 neutroni).

La massa di un atomo misurata in amu ha un valore molto vicino al numero di massa A (cioè al numero di nucleoni). 1 mol di atomi o molecole di qualsiasi sostanza ha una massa in grammi uguale alla massa in amu dei singoli atomi o molecole.

Il valore oggi accettato per l'unità di massa atomica è riportato al § D.2. Approssimativamente, $1 u = 1.66 \times 10^{-27}$ kg.

Un **elettronvolt** (eV) è l'energia acquistata da un elettrone nel passaggio tra due punti separati da una differenza di potenziale elettrico di 1 V: $1 \text{ eV} = 1.6021892 \times 10^{-19}$ J.

Esempio: L'energia necessaria per ionizzare un atomo di idrogeno, cioè per separare a distanza infinita l'elettrone dal protone, è 13.595 eV. La separazione in energia tra i due livelli iperfini del cesio 133 utilizzati per definire il secondo è $\Delta E \simeq 4 \times 10^{-5}$ eV.

L'**unità astronomica** (ua), corrispondente all'incirca alla distanza Terra-Sole, è usata per esprimere le distanze all'interno del sistema solare. Approssimativamente, $1 \text{ ua} = 1.496 \text{ times } 10^{11} \text{ m}$.

Nella misurazione degli **angoli piani** si usa spesso come unità di misura il **grado** ($^\circ$), nonché i suoi sottomultipli non decimali: il minuto, $1' = (1/60)^\circ$, e il secondo, $1'' = (1/3600)^\circ$.

Nella misurazione delle **distanze a livello atomico** è spesso usato come unità di misura delle lunghezze l'ångström (\AA). $1 \text{ \AA} = 0.1 \text{ nm} = 10 \times 10^{-10} \text{ m}$.

2.4.3 Sistemi anglosassoni

Al § B.3 sono elencate alcune unità di misura tuttora in uso nei paesi anglosassoni, in attesa della definitiva adozione del S.I.

I sistemi anglosassoni sono generalmente a base non decimale. Ad esempio, partendo dall'unità base di lunghezza, cioè il pollice (*inch*), i principali multipli sono il piede (*foot*), pari a 12 pollici, e la iarda (*yard*), pari a 3 piedi.

Da notare anche che talora esistono differenze di valore tra omonime unità inglesi e americane. Ad esempio il *gallone*, unità di volume, vale 4.546 dm^3 in Gran Bretagna e 3.785 dm^3 negli Stati Uniti.

2.4.4 Sistemi naturali

In alcuni campi specialistici della Fisica si usano talora, per semplificare le notazioni e i calcoli, unità di misura dette *naturali* in quanto assumono come valori unitari quelli di alcune grandezze di particolare rilevanza nella fisica atomica e nucleare.

Il **sistema atomico di Hartree** è spesso utilizzato nella descrizione dei fenomeni a livello atomico. Le grandezze fondamentali per la meccanica e l'elettromagnetismo sono tre, come per i sistemi c.g.s.:

- la *massa*: unità di misura è la massa a riposo dell'elettrone, $m_e = 1$ (nel S.I. $m_e = 9.1093897 \cdot 10^{-31}$ kg);
- la *carica elettrica*: unità di misura è la carica dell'elettrone $e = 1$ (nel S.I. $e = 1.60217733 \cdot 10^{-19}$ C);
- l'*azione* (prodotto di un'energia per un tempo): unità di misura è il quanto d'azione h (costante di Planck) diviso per 2π , $\hbar = h/2\pi = 1$ (nel S.I. $\hbar = 1.0545727 \cdot 10^{-34}$ J s);

Il sistema di Hartree è indicato anche come *sistema* $m_e = e = \hbar = 1$.

Esempio: Consideriamo ancora il modello di Bohr dell'atomo di idrogeno. Il raggio dell'orbita più interna dell'elettrone e la corrispondente energia potenziale sono espressi, nel sistema c.g.s. di Gauss, come

$$a_0 = \frac{\hbar}{m_e e^2}; \quad U_0 = -\frac{e^2}{a_0} = -\frac{m_e e^4}{\hbar}.$$

Nel sistema di Hartree quindi $a_0 = 1$, $U_0 = 1$. Il raggio della prima orbita di Bohr a_0 rappresenta l'unità naturale di lunghezza. Il modulo di U_0 rappresenta l'unità naturale di energia, cui viene

dato il nome di hartree (vedi Appendice B.5). La velocità dell'elettrone nella prima orbita di Bohr, $v_0 = e^2/\hbar$, è l'unità di velocità. L'unità di tempo è infine data dal rapporto a_0/v_0 .

Il **sistema di Dirac** è spesso utilizzato nella fisica delle particelle elementari. Le grandezze fondamentali sono:

- a) la *massa*: unità di misura è la massa a riposo dell'elettrone, $m_e=1$;
- b) la *velocità*: unità di misura è la velocità della luce nel vuoto, $c=1$ (nel S.I. $c=299\,792\,458$ m/s);
- c) l'*azione*: unità di misura è $\hbar=h/2\pi=1$;

Il sistema di Dirac è indicato anche come *sistema* $m_e=c=\hbar=1$.

2.4.5 Unità elettroniche ed informatiche

Nei campi dell'elettronica, dell'informatica e delle telecomunicazioni sono in uso unità di misura specifiche, che non hanno ancora trovato sistemazione normativa nel S.I.

Tali unità possono servire a misurare la **quantità di informazione**:

- a) il **bit** (contrazione dall'inglese *binary digit*) corrisponde ad una cifra binaria;
- b) 1 **byte** = 8 bit;
- c) 1 **word** = uno o più byte elaborabili contemporaneamente;

oppure la **velocità di calcolo**:

- d) le **IPS** sono le *Instructions Per Second* (Istruzioni al Secondo); tipicamente si usano i multipli, come 1 MIPS = 10^6 IPS;
- e) le **FLOPS** sono le *Floating Point Operations Per Second* (Operazioni in Virgola Mobile al Secondo), anche qui tipicamente si usano i multipli, come 1 MFLOPS = 10^6 FLOPS;

o infine la **velocità di trasmissione dell'informazione**:

- f) il **bps** o **bit/s**, corrispondente ad un bit al secondo, talora impropriamente chiamato *baud*.

2.5 Analisi dimensionale

Come abbiamo visto, una volta scelte le grandezze fisiche da considerare come fondamentali, resta arbitraria la scelta delle rispettive unità di misura. Vogliamo studiare come il cambiamento dell'unità di misura di una grandezza fondamentale si ripercuote sulle unità delle altre grandezze (fondamentali e derivate). Per semplicità ci riferiremo solo al S.I.

2.5.1 Dimensioni delle grandezze fisiche

Supponiamo di sostituire l'unità di misura delle lunghezze, cioè il metro, con un'unità L volte più piccola; di conseguenza le misure

di lunghezza	sono moltiplicate per	L
di tempo	sono moltiplicate per	$L^0 = 1$
di volume	sono moltiplicate per	L^3
di velocità	sono moltiplicate per	L

L'esponente del fattore L viene chiamato *dimensione* rispetto alla lunghezza.

Simbolicamente la dipendenza del valore di una grandezza qualsiasi X dalle unità delle grandezze fondamentali A, B, C... viene espressa tramite equazioni dimensionali del tipo:

$$[X] = [A]^\alpha [B]^\beta [C]^\gamma \dots$$

L'analisi delle dimensioni delle grandezze trova applicazione pratica principalmente in meccanica e talora in elettromagnetismo: ci si limita perciò in genere a considerare le dimensioni rispetto a lunghezza, massa, tempo e (qualora occorra) intensità di corrente, simbolizzati con L, M, T, A.

Ad esempio, le dimensioni della velocità sono

$$[v] = [L]^1 [T]^{-1} [M]^0$$

le dimensioni del lavoro e dell'energia sono

$$[W] = [E] = [L]^2 [T]^{-2} [M]^1$$

le dimensioni della differenza di potenziale elettrico sono

$$[V] = [L]^2 [T]^{-1} [M] [A]^{-1}$$

Grandezze che hanno le stesse dimensioni sono dette *dimensionalmente omogenee*.

2.5.2 Grandezze adimensionali

Alcune quantità hanno dimensione nulla rispetto a tutte le grandezze fondamentali: $[L]^0$, $[T]^0$, $[M]^0$, $[A]^0$. Si tratta dei *numeri puri* (3 , $\sqrt{2}$, π , ...) e delle *grandezze adimensionali*, cioè grandezze uguali al rapporto tra due grandezze omogenee.

Il valore delle grandezze adimensionali *non* dipende dalla scelta delle unità di misura delle grandezze fondamentali e derivate.

Esempio: Gli *angoli piani*, misurati in radianti, sono grandezze adimensionali; la misura in radianti è infatti il rapporto tra due lunghezze, quella dell'arco e quella del raggio. Anche gli *angoli solidi*, misurati in steradiani, sono grandezze adimensionali; la misura in steradiani è infatti il rapporto tra due lunghezze al quadrato.

Esempio: La densità assoluta di una sostanza è il rapporto tra la sua massa e il suo volume: $\rho = m/V$. La *densità relativa* di una sostanza è il rapporto tra la sua densità assoluta e la densità dell'acqua alla temperatura di 4°C . La densità relativa è una grandezza adimensionale.

Esempio: Una costante adimensionale molto importante nella fisica atomica è la *costante di struttura fine* α , definita nel S.I. dalla relazione

$$\alpha^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \simeq \frac{1}{(137)^2}.$$

Il valore numerico della costante di struttura fine, $\alpha \simeq 1/137$, non dipende dal sistema di unità di misura.

2.5.3 Principio di omogeneità dimensionale

L'utilizzazione pratica dell'analisi delle dimensioni si fonda sul **principio di omogeneità dimensionale**: possono essere uguagliate o sommate solo espressioni dimensionalmente omogenee. In altri termini, un'equazione tra grandezze fisiche è del tipo

$$A + B + C + \dots = M + N + P + \dots$$

dove $A, B, C, \dots, M, N, P, \dots$ devono essere monomi dimensionalmente omogenei.

In particolare, le funzioni trascendenti (sen, cos, exp, log, ...) ed i loro argomenti devono essere adimensionali.

Esempio: Una massa appesa ad una molla esegue un moto oscillatorio. La sua coordinata di posizione z dipende dal tempo t secondo una legge sinusoidale. La dipendenza di x da t *non* può essere espressa come $x(t) = \text{sen } t$, in quanto: a) l'argomento t della funzione seno non è adimensionale; b) la funzione seno è adimensionale mentre x ha le dimensioni di una lunghezza. L'equazione corretta è $x(t) = A \text{sen}(\omega t)$, dove A è una costante con le dimensioni di una lunghezza, ω è una costante con le dimensioni inverse al tempo.

2.5.4 Applicazioni dell'analisi dimensionale

Ricordiamo brevemente le principali applicazioni dell'analisi dimensionale.

Verifica delle equazioni

L'omogeneità dimensionale è condizione necessaria per l'esattezza di un'equazione fisica. Non è però condizione sufficiente, perché:

- l'analisi dimensionale non è in grado di valutare l'esattezza numerica;
- esistono grandezze omogenee dimensionalmente, ma con significato fisico ben distinto (ad es. il lavoro meccanico ed il momento di una forza).

Esempio: Si vuole calcolare la traiettoria di un proiettile lanciato con velocità iniziale v_0 ad un angolo θ rispetto all'orizzontale. Applicando le regole della cinematica si trova

$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + x \operatorname{tg} \theta$$

dove x e z sono le coordinate rispettivamente orizzontale e verticale.

È immediato verificare la correttezza dimensionale dell'equazione. Se l'omogeneità dimensionale non fosse stata soddisfatta, l'equazione sarebbe stata sicuramente sbagliata.

Viceversa, l'equazione avrebbe potuto essere sbagliata anche se dimensionalmente corretta: ad esempio se per un errore di calcolo si fosse ottenuto $\cos \theta$ anziché $\operatorname{tg} \theta$ nell'ultimo termine.

Per poter applicare l'analisi dimensionale alla verifica delle equazioni è necessario che i calcoli siano fatti sotto forma letterale, ed i valori numerici siano sostituiti solo alla fine.

Deduzione di equazioni

L'analisi dimensionale consente talora di determinare la relazione che intercorre tra le diverse grandezze che caratterizzano un fenomeno fisico, a meno di eventuali costanti adimensionali.

Esempio: Il periodo \mathcal{T} di oscillazione di un pendolo può dipendere, in linea di principio, dalla massa m e dalla lunghezza ℓ del pendolo, dall'accelerazione di gravità g e dall'ampiezza θ_0 dell'oscillazione. La dipendenza di \mathcal{T} da m , ℓ e g potrà essere espressa dimensionalmente come

$$[\mathcal{T}] = [m]^\alpha [\ell]^\beta [g]^\gamma$$

cioè

$$[T] = [M]^\alpha [L]^{\beta+\gamma} [T]^{-2\gamma}.$$

Il principio di omogeneità dimensionale impone che

$$\alpha = 0; \quad \beta + \gamma = 0; \quad \gamma = -1/2,$$

da cui

$$T = C \sqrt{\ell/g}$$

dove C è una costante adimensionale. Si noti che l'analisi dimensionale non è in grado di determinare l'eventuale dipendenza del periodo dall'ampiezza θ_0 (adimensionale), né il valore della costante C .

Il periodo di oscillazione del pendolo, considerato nell'esempio precedente, può comunque venire determinato in modo completo (cioè includendo le grandezze adimensionali) risolvendo l'equazione del moto.

Nel caso di sistemi fisici molto complessi, per i quali non esista una teoria completa (ad esempio, in alcuni campi della fluidodinamica) l'analisi dimensionale può rappresentare uno strumento di grande utilità.

Similitudine fisica

Sistemi complessi di grandi dimensioni vengono spesso studiati con l'aiuto di modelli in scala ridotta (ad esempio in ingegneria idraulica ed aeronautica, in studi di elasticità, in studi sulla trasmissione del calore, etc). L'analisi dimensionale consente di valutare come la riduzione in scala della misura delle grandezze fondamentali si riflette sulle misure delle grandezze derivate. Risulta molto utile, nelle modellizzazioni in scala, fare ricorso a grandezze adimensionali (come le densità relative, il numero di Reynolds, il numero di Mach, etc.) che non dipendono dai fattori di scala.

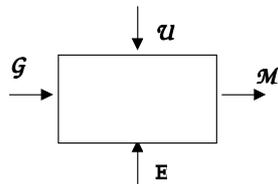
Capitolo 3

Strumenti di misura

Le operazioni di misurazione delle grandezze fisiche vengono effettuate per mezzo degli *strumenti di misura* (in inglese *measuring instruments*). Nella pratica quotidiana della ricerca scientifica o delle applicazioni tecnologiche si utilizzano molti strumenti di diverso tipo, in genere prodotti in serie, ma talora anche realizzati *ad hoc* per esigenze particolari. In questo Capitolo verranno introdotti alcuni criteri generali per la classificazione degli strumenti e per la valutazione delle loro prestazioni.

3.1 Elementi funzionali

In linea di principio, il funzionamento di uno strumento di misura può essere schematizzato nel modo seguente: la grandezza \mathcal{G} da misurare viene confrontata con il campione di unità di misura \mathcal{U} ; il risultato della misurazione, cioè il valore X della misura, viene presentato in uscita dallo strumento, in genere trasformato nel valore Z di una nuova grandezza \mathcal{M} di facile lettura (ad es. lo spostamento di un indice su una scala graduata). Nella figura, la quarta freccia (E) rappresenta l'energia che in molti casi deve essere fornita dall'esterno allo strumento.



Alcuni pochi strumenti presentano una struttura logica semplice, in cui la grandezza \mathcal{G} viene confrontata direttamente con il campione \mathcal{U} .

Esempio: Un'asta millimetrata per misure di lunghezza. La grandezza \mathcal{G} in ingresso è la lunghezza che si vuole misurare. Il campione \mathcal{U} (in questo caso il millimetro) ed i suoi multipli sono incisi sull'asta. Anche la misura $X(\mathcal{G})$ è leggibile direttamente sull'asta.

Nella maggior parte dei casi la struttura logica dello strumento è più complessa: il confronto con il campione avviene tramite l'operazione di *taratura* (in inglese *calibration*), eseguita generalmente dal costruttore dello strumento. La grandezza \mathcal{G} può subire più manipolazioni e trasformazioni in altre grandezze.

Esempio: Il termometro a mercurio. La grandezza \mathcal{G} in ingresso è la temperatura del fluido a contatto con il bulbo del termometro. La grandezza \mathcal{M} in uscita è l'altezza della colonna di mercurio nel cannello. Lo strumento è tarato in modo da poter leggere direttamente sulla scala graduata i valori $X(\mathcal{G})$ della grandezza in ingresso.

Per studiare la struttura logica di uno strumento, conviene considerarlo costituito da più *elementi funzionali*, ciascuno in grado di svolgere un ben determinato compito.

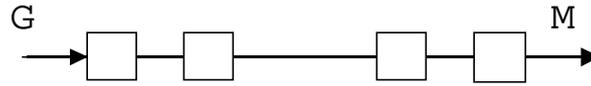


Figura 3.1: Rappresentazione schematica di uno strumento come sequenza di elementi funzionali (catena di misura).

Quando si vuole porre in evidenza la struttura logica interna di uno strumento come sequenza di elementi funzionali (Fig. 3.1) si usa spesso il termine *catena di misura* (ingl. *measuring chain*).

3.1.1 Elemento sensibile (sensore)

Il *sensore* (ingl. *sensor*) è il primo anello della catena, cioè l'elemento d'ingresso dello strumento, che viene direttamente influenzato dalla grandezza \mathcal{G} da misurare.

Esempi: Il bulbo del termometro a mercurio. La giunzione bimetallica di un termometro a termocoppia. La coppia di puntali di uno strumento per misure di corrente elettrica o differenza di potenziale elettrico.

3.1.2 Elemento di uscita della misura

È l'ultimo anello della catena di misura. Trasmette all'esterno dello strumento il valore $Z(\mathcal{M})$ della grandezza in uscita, che fornisce l'informazione sul valore $X(\mathcal{G})$ della grandezza in ingresso. L'elemento di uscita è spesso un visualizzatore (in inglese *display*), leggibile direttamente dall'operatore.

Esempi: Un ago mobile (ingl. *index*) su un quadrante graduato (ingl. *dial*). Un visualizzatore digitale. Il pennino di un registratore. Una stampante.

L'elemento di uscita non comunica necessariamente con l'uomo: esso può anche fornire segnali, tipicamente elettrici, adatti a costituire l'ingresso di un altro dispositivo meccanico o elettrico (ad es. un attuatore o un calcolatore elettronico).

Esempio: I termostati ambientali misurano la temperatura di una stanza e la confrontano con un valore pre-impostato. L'esito della misura non viene generalmente visualizzato, bensì inviato, sotto forma di segnale elettrico, ad un attuatore (pompa di circolazione o valvola) o ad un elaboratore elettronico di controllo.

3.1.3 Elementi intermedi: trasduttori, amplificatori, manipolatori

All'interno della catena di misura, la grandezza da misurare può subire una o più trasformazioni in altre grandezze, più comode da manipolare, trasmettere o visualizzare. Nella pratica è molto frequente il caso di grandezze meccaniche o termiche trasformate in grandezze elettriche.

L'elemento che esegue la trasformazione è detto *trasduttore* (ingl. *transducer*).

Spesso, all'interno della catena di misura, il valore di una grandezza è soggetto a delle variazioni: ad esempio, può venire amplificato, o subire operazioni di addizione o sottrazione. L'elevata flessibilità dei segnali elettrici in relazione a questo tipo di manipolazioni è uno dei motivi che giustificano la conversione di grandezze meccaniche o termiche in grandezze elettriche.

Esempio 1: In un termometro a resistenza elettrica il sensore è costituito da un resistore attraversato da una corrente elettrica costante. Una variazione di temperatura si traduce in una variazione della resistenza elettrica, che a sua volta produce una variazione della differenza di potenziale ai capi del resistore. Le deboli variazioni di differenza di potenziale vengono poi amplificate in modo da pilotare lo spostamento di un indice su una scala graduata opportunamente tarata.

Esempio 2: In una *bilancia elettronica* la grandezza \mathcal{G} da misurare è la massa m . La bilancia trasforma la forza peso mg in una grandezza elettrica: una differenza di potenziale o un'intensità



Figura 3.2: Confronto schematico tra uno strumento con uscita a deviazione (a sinistra) e uno strumento con uscita a zero (a destra). Nel primo caso la catena di misura è aperta, nel secondo caso è chiusa.

di corrente. Le variazioni della grandezza elettrica vengono amplificate in modo da pilotare il visualizzatore, opportunamente tarato, dell'elemento di presentazione dei dati.

È bene notare che la suddivisione di uno strumento o di una catena di misura in elementi funzionali, se è in genere sempre possibile dal punto di vista logico, non necessariamente corrisponde ad una reale suddivisione fisica. È infatti frequente il caso che un solo componente fisico di uno strumento svolga contemporaneamente le funzioni logiche di due o più elementi funzionali.

3.2 Classificazioni degli strumenti

In relazione al loro modo di funzionamento, gli strumenti possono venire variamente classificati.

3.2.1 Strumenti con uscita a deviazione o a zero

Negli strumenti con **uscita a deviazione** la variazione del valore X della grandezza \mathcal{G} in ingresso viene trasformata in una corrispondente variazione Z della grandezza \mathcal{M} in uscita (ad es., la deviazione di un indice su una scala graduata). La catena di misura è aperta (Fig. 3.2, a sinistra).

Esempi: Il dinamometro, il termometro a mercurio, la bilancia pesa-persone.

Negli strumenti con **uscita a zero** il valore incognito X della grandezza \mathcal{G} in ingresso viene posto a confronto con un valore noto Y della stessa grandezza. In genere, il confronto tra X e Y avviene per sottrazione: il valore noto Y viene variato finché la differenza $X - Y$ non risulta zero. L'elemento di presentazione dei dati è un *rivelatore di zero*. (Questo metodo di misurazione viene anche detto *ad azzeramento* o *per opposizione*). La catena di misura è chiusa, cioè presenta un ramo di ritorno (*retroazione*, in inglese *feedback*) che contiene un attuatore, manuale o automatico, in grado di far variare il valore noto Y (Fig. 3.2, a destra). Elemento fondamentale della catena chiusa è il manipolatore che esegue la sottrazione $X - Y$.

Gli strumenti con uscita a zero sono generalmente più accurati di quelli a deviazione, ma meno adatti a seguire grandezze variabili velocemente nel tempo.

Esempio: La bilancia a due piatti: la misurazione di una massa incognita m posta su un piatto richiede di variare manualmente il numero di masse campione poste sull'altro piatto fino a raggiungere l'equilibrio meccanico.

3.2.2 Strumenti analogici o digitali

Negli **strumenti analogici** (in inglese *analogue instruments*) il valore X della grandezza da misurare si trasforma, al termine della catena di misura, in un segnale di tipo analogico, cioè un segnale che può variare con continuità (deviazione di un indice, valore di una tensione elettrica, etc.)

Negli **strumenti digitali** (in inglese *digital instruments*), al termine della catena di misura il valore X viene trasformato in un numero, leggibile direttamente su di un visualizzatore oppure codificato sotto forma di segnali elettrici (ad esempio in codice binario) adatti ad essere accettati da un elaboratore elettronico.

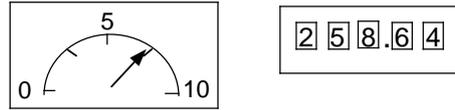


Figura 3.3: Visualizzatore di uno strumento analogico (a sinistra) e di uno strumento digitale (a destra)

La trasformazione del segnale analogico d'ingresso in un segnale digitale in uscita può essere ottenuta mediante congegni meccanici, ma generalmente è oggi realizzata per mezzo di dispositivi elettronici detti *convertitori analogico-digitali* ($ADC = \text{Analog to Digital Converter}$).

Esempio: Una generica grandezza \mathcal{G} viene preventivamente trasformata, per mezzo di uno o più trasduttori, in una differenza di potenziale elettrico V_i . Un modo relativamente semplice per realizzare la conversione analogico-digitale della differenza di potenziale V_i si basa sul *convertitore a singola rampa*. In questo dispositivo elettronico, una differenza di potenziale di riferimento V_r variabile linearmente nel tempo ($V_r = at$) viene prodotta ogni ΔT secondi. Durante la crescita della rampa $V_r = at$, si contano in sequenza gli impulsi prodotti da un generatore a frequenza costante, e si confronta il valore crescente V_r con il valore d'ingresso V_i utilizzando un componente elettronico detto *comparatore*. Quando $V_r = V_i$ il comparatore invia un segnale di stop al contatore di impulsi, che viene così fermato: il numero n_i di impulsi contati è proporzionale al valore d'ingresso V_i , e può venire direttamente visualizzato oppure inviato ad un elaboratore. Ogni singola conversione analogico-digitale richiede un intervallo di tempo ΔT (tempo di campionamento, in inglese *sampling time*).

3.2.3 Strumenti indicatori o registratori

Negli **strumenti indicatori** (in inglese *displaying instruments*) il valore della misura viene presentato all'operatore, sotto forma analogica o digitale, per la sola durata dell'operazione di misura.

Esempi: La bilancia a due piatti, il termometro a mercurio.

Negli **strumenti registratori** (in inglese *recording instruments*) il valore della misura viene immagazzinato, in forma analogica o digitale, su opportuni supporti: carta da grafico, nastro o disco magnetico, memorie a semiconduttore, etc.

Esempi: Un termometro registratore, un barometro registratore.

3.2.4 Strumenti attivi o passivi

Gli **strumenti passivi** prelevano l'energia necessaria al loro funzionamento dal sistema su cui viene effettuata la misurazione.

Gli **strumenti attivi** sono invece forniti di una sorgente di energia estranea al sistema in misura (alimentazione dalla rete elettrica, batterie, etc.).

Esempio: Un termometro a mercurio è uno strumento passivo. Un termometro a resistenza elettrica è uno strumento attivo.

3.3 Caratteristiche statiche degli strumenti

Le caratteristiche di rendimento di uno strumento individuano la qualità delle misure che lo strumento è in grado di eseguire. In questo § 3.3 e nel successivo § 3.4 considereremo le principali caratteristiche *statiche*, relative cioè a misurazioni di *grandezze costanti nel tempo*. Nel § 3.5 accenneremo alle caratteristiche *dinamiche*, relative cioè alla misurazione di grandezze variabili nel tempo.

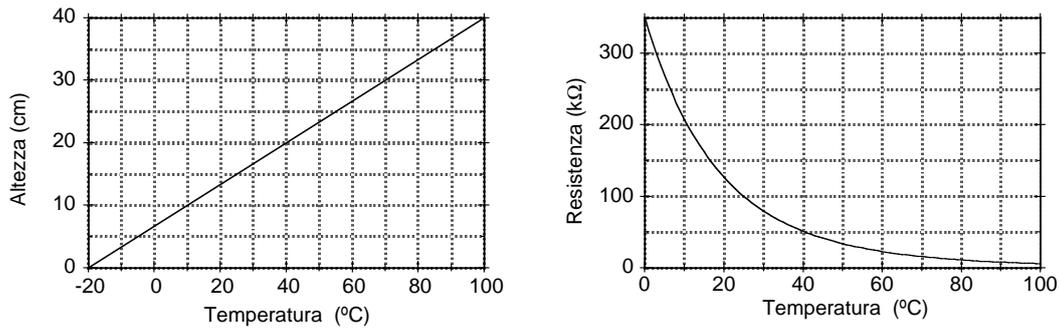


Figura 3.4: Nel termometro a mercurio (a sinistra) la relazione tra temperatura e altezza della colonnina è lineare. In un termometro con sonda a semiconduttore (a destra) la relazione tra temperatura e resistenza elettrica non è lineare.

3.3.1 Campo di misura

Il *campo di misura* (in inglese *range of indication*) è l'intervallo di valori X della grandezza \mathcal{G} in cui lo strumento esegue misure entro un prefissato grado di accuratezza.

Il campo di misura è limitato inferiormente dalla *portata minima* (in inglese *lower limit*) e superiormente dalla *portata massima*, detta anche *fondo scala* (in inglese *upper limit*). La *portata massima di sicurezza* (in genere maggiore del fondo scala) è il massimo valore di X applicabile senza danneggiare lo strumento.

In alcuni strumenti (detti strumenti *a più portate*) è possibile variare il campo di misura per mezzo di opportuni selettori (ad esempio ruotando la manopola di un commutatore).

Esempio: In un metro a nastro la portata minima è zero, la portata massima corrisponde alla lunghezza della scala graduata. Non c'è necessità di definire una portata massima di sicurezza.

Esempio: Nel termometro a mercurio il campo di misura è definito dai valori minimo e massimo incisi sulla scala graduata (ad es. -10°C e $+100^{\circ}\text{C}$). Il valore massimo rappresenta generalmente anche la portata massima di sicurezza: esporre il termometro a temperature superiori può provocarne la rottura.

3.3.2 Linearità

Uno strumento è detto *lineare* quando la curva di risposta, cioè la relazione che collega i valori Z della grandezza \mathcal{M} in uscita ai valori X della grandezza \mathcal{G} in ingresso, è lineare.

Esempio 1: Il termometro a mercurio è con ottima approssimazione uno strumento lineare. Nel campo tipico di utilizzo, il coefficiente di espansione termica del mercurio è costante, e l'altezza della colonnina di mercurio cresce linearmente con la temperatura (Fig. 3.4, a sinistra).

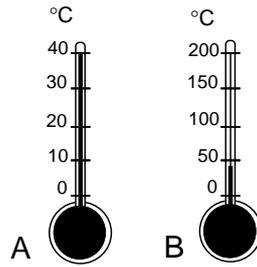
Esempio 2: Un termometro con sonda a semiconduttore (termistore) è un buon esempio di strumento *non* lineare. La grandezza \mathcal{G} in ingresso è la temperatura, la grandezza \mathcal{M} in uscita è la resistenza elettrica del termistore. Al crescere della temperatura la resistenza elettrica del termistore si riduce in modo non lineare (Fig. 3.4, a destra).

3.3.3 Sensibilità

La *sensibilità* (in inglese *sensitivity*) è il rapporto $\Delta Z/\Delta X$ tra variazione del valore della grandezza \mathcal{M} in uscita dallo strumento (ad es. la deviazione di un indice) e corrispondente variazione del valore della grandezza \mathcal{G} in ingresso (grandezza da misurare).

Esempio 1: In un termometro a mercurio la grandezza \mathcal{G} in ingresso è la temperatura, la grandezza \mathcal{M} in uscita è l'altezza della colonnina di mercurio. Facendo riferimento alla figura, il termometro A ha una sensibilità 5 volte maggiore del termometro B, in quanto la stessa

variazione di temperatura provoca una variazione 5 volte maggiore dell'altezza della colonna di mercurio.



Negli *strumenti lineari* la sensibilità $\Delta Z/\Delta X$ è costante in tutto il campo di misura, e corrisponde alla pendenza della retta nel grafico di Z in funzione di X .

Esempio 2: Nel caso del termometro a mercurio della Fig. 3.4 (a sinistra) la sensibilità $\Delta h/\Delta \theta$ ha il valore costante di $0.33 \text{ cm}/^\circ\text{C}$.

Negli *strumenti non lineari* la sensibilità non è costante nel campo di misura; la pendenza della curva $Z(X)$ non è infatti costante. La sensibilità va pertanto definita come la derivata dZ/dX .

Esempio 3: Nel termometro con sonda a semiconduttore della Fig. 3.4 (a destra) il valore assoluto $|dR/d\theta|$ della sensibilità varia da $18.4 \text{ k}\Omega/^\circ\text{C}$ (a 0°C) a $0.18 \text{ k}\Omega/^\circ\text{C}$ (a 100°C).

Negli *strumenti analogici* il visualizzatore è spesso costituito da una scala graduata. Si usa talora esprimere la sensibilità $\Delta Z/\Delta X$ considerando come valore ΔZ il numero di divisioni sulla scala graduata. La sensibilità è allora l'inverso della risoluzione (vedi più sotto).

Esempio 4: Un regolo millimetrato ha la sensibilità $1/\Delta X$ di 1 divisione per millimetro.

Negli *strumenti digitali* la sensibilità va valutata considerando la grandezza (analogica) \mathcal{M} a monte del convertitore analogico/digitale di uscita.

Si chiama *soglia di sensibilità* il più piccolo valore della grandezza \mathcal{G} in ingresso capace di provocare una variazione della grandezza \mathcal{M} in uscita.

3.3.4 Risoluzione di lettura

La risoluzione di lettura (in inglese *display resolution*) è la più piccola variazione misurabile ΔX del valore X della grandezza \mathcal{G} in ingresso, corrispondente alla minima variazione percepibile ΔZ del valore Z della grandezza \mathcal{M} in uscita.

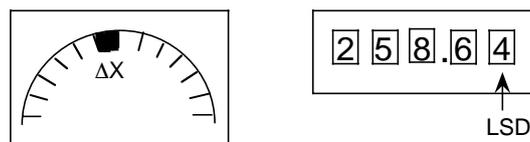


Figura 3.5: Risoluzione di lettura di uno strumento analogico (a sinistra) e di uno strumento digitale (a destra).

Negli **strumenti analogici** la risoluzione di lettura corrisponde generalmente alla distanza minima tra due incisioni della scala graduata (Fig. 3.5, a sinistra).

Negli **strumenti digitali** la risoluzione di lettura corrisponde al valore unitario della cifra meno significativa ($LSD = \text{Least Significant Digit}$) (Fig. 3.5, a destra)

Esempi: Le aste millimetrato (righe da disegno) hanno generalmente risoluzione di lettura $\Delta X = 1 \text{ mm}$. I calibri a vite micrometrica hanno generalmente risoluzione di lettura $\Delta X = 0.01 \text{ mm}$.

Nota: Sensibilità e risoluzione sono tra di loro strettamente correlate. Per ridurre la risoluzione di uno strumento è in genere necessario aumentare la sua sensibilità. Come abbiamo visto

più sopra, per gli strumenti analogici talora la sensibilità viene espressa come l'inverso $1/\Delta X$ della risoluzione.

Nota: Non esiste tuttora un diffuso accordo sulla nomenclatura utilizzata in questo paragrafo. Talora si usa il termine *potere risolvete* per indicare l'inverso della risoluzione, $1/\Delta X$, oppure il rapporto tra l'estensione del campo di misura e la risoluzione. È pure frequente, seppure evidentemente sbagliato, l'uso del termine *risoluzione* per indicare il *potere risolvete*. Il significato reale dei vari termini risulta in genere chiarito dal contesto.

3.3.5 Discrezione

Uno strumento di misura provoca generalmente una perturbazione al sistema su cui viene eseguita la misurazione. Il valore X della grandezza \mathcal{G} viene pertanto alterato dalla presenza dello strumento di misura. Si parla di maggiore o minore *discrezione* (in inglese *transparency*) di uno strumento in relazione all'entità di questa alterazione.

Esempio 1: La misurazione di una massa con una bilancia non altera il valore della massa stessa; la bilancia è uno strumento discreto.

Esempio 2: La misurazione della temperatura di un corpo richiede uno scambio di calore tra il corpo e il termometro, e quindi altera lo stato termico del corpo stesso.

Esempio 3: L'applicazione di un voltmetro ad un circuito elettrico per misurare una differenza di potenziale altera le caratteristiche elettriche del circuito stesso.

Nel § 3.2 abbiamo introdotto la distinzione tra strumenti attivi e passivi. Evidentemente uno strumento passivo perturba il sistema soggetto a misurazione, in quanto ne preleva l'energia necessaria per il suo funzionamento (si parla in questo caso anche di *consumo* di uno strumento).

Va tuttavia tenuto presente che anche per gli strumenti attivi la perturbazione, se può spesso venire ridotta al di sotto dei livelli ritenuti accettabili per misure macroscopiche, non può mai venire completamente eliminata. In particolare, a livello di sistemi atomici o subatomici la perturbazione indotta sul sistema dalla misurazione non è mai trascurabile.

3.3.6 Limiti d'impiego

Il funzionamento di uno strumento risente delle condizioni ambientali. Oltre alla grandezza \mathcal{G} che si vuole misurare, altre grandezze (dette *grandezze d'influenza*, in inglese *influence quantities*) possono influire sul valore della misura: temperatura, pressione, umidità, intensità delle vibrazioni meccaniche, accelerazione, tensione di alimentazione, campi elettromagnetici, etc.

Le *condizioni d'impiego* (in inglese *operating conditions*) di uno strumento definiscono gli intervalli dei valori delle grandezze d'influenza nel cui ambito lo strumento esegue misurazioni entro un prefissato grado di accuratezza.

Esempio: Dalle caratteristiche tecniche di una bilancia elettronica:

temperatura di operazione	$0 \div 40$ C
livello sopra/sotto il mare	-3400 m ... $+6000$ m
umidità relativa dell'aria	$15\% \div 85\%$
vibrazioni	0.3 m/s ²

Eseguire una misurazione al di fuori dei limiti d'impiego dello strumento comporta l'introduzione di errori nella misura, e talora anche il danneggiamento dello strumento stesso.

3.4 Accuratezza di uno strumento

Come abbiamo già accennato al § 1.3, il risultato della misurazione di una grandezza fisica, qualsiasi sia lo strumento utilizzato, non è mai un valore numerico X univocamente definito.

Come minimo, ogni strumento è infatti caratterizzato da una **risoluzione di lettura** finita ΔX , per cui non è in grado di fornire informazioni su variazioni della grandezza inferiori a ΔX . Per

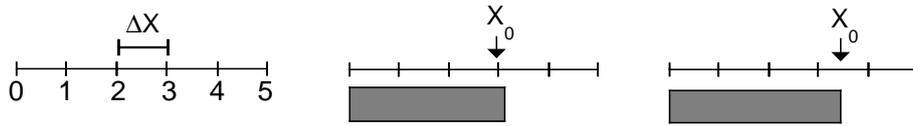


Figura 3.6: Misurazione con uno strumento analogico. A sinistra: rappresentazione schematica di una scala graduata, con $\Delta X = 1$ (le unità di misura dipendono ovviamente dal tipo di grandezza misurata e dalle caratteristiche dello strumento). Nella situazione rappresentata al centro, $X = 3 \pm 0.5$. Nella situazione rappresentata a destra, $X = 3.5 \pm 0.5$.

effetto della risoluzione finita, il risultato di una singola misurazione è pertanto un intervallo continuo di valori, di ampiezza pari a ΔX .

Per convenzione, la misura di una grandezza fisica viene generalmente espressa nella forma

$$X = X_0 \pm \delta X, \quad (3.4.1)$$

dove X_0 è un valore centrale che individua la posizione dell'intervallo di valori sull'asse X e δX è l'incertezza dovuta alla risoluzione di lettura.

Per il momento opereremo la scelta, del tutto ragionevole, di esprimere l'incertezza dovuta alla risoluzione come $\delta X = \Delta X/2$. Nel Cap. 4 riprenderemo in considerazione l'argomento in modo più approfondito e vedremo che in molti casi può essere più conveniente esprimere l'incertezza dovuta alla risoluzione in modo diverso (§ 4.5). Negli *strumenti digitali* (Fig. 3.5, a destra) il valore centrale X_0 è dato direttamente dal valore che compare sul visualizzatore. La risoluzione ΔX e l'incertezza δX sono date rispettivamente dal valore unitario della cifra meno significativa (LSD) e dalla sua metà.

Esempio: Si misura un intervallo di tempo τ con un cronometro digitale. Sul visualizzatore si legge 34.27 s. Il valore unitario della LSD è 0.01 s, cioè un centesimo di secondo. La misura andrà espressa come $\tau = (34.27 \pm 0.005)$ s.

Negli *strumenti analogici* la valutazione del valore centrale X_0 può essere diversa a seconda che l'estremo dell'oggetto da misurare (ovvero l'indice mobile su un visualizzatore) sia in prossimità di una incisione sulla scala graduata oppure cada all'incirca a metà tra due incisioni. Le due situazioni sono esemplificate nella Fig. 3.6. Nel primo caso il valore X_0 verrà letto direttamente sulla scala graduata; nel secondo caso si potrà attribuire a X_0 un valore intermedio rispetto ai valori delle due incisioni contigue.

Non è comunque prudente considerare una risoluzione ΔX inferiore alla distanza tra due tacche contigue, anche se quest'operazione potrebbe talora sembrare plausibile. In genere infatti la risoluzione di lettura di uno strumento è già ridotta dal costruttore al valore minimo compatibile con l'accuratezza globale.

Esempio: Si misura l'altezza di un foglio di quaderno con una riga millimetrata. L'estremità del foglio appare equidistante dalle due tacche contigue corrispondenti a 296 e 297 mm. È plausibile considerare come valore centrale $X_0 = 296.5$ mm, ma può essere imprudente assumere una risoluzione inferiore alla distanza tra incisioni contigue ($\Delta X = 1$ mm).

Oltre alla risoluzione finita dello strumento, altri fattori possono influenzare il risultato e la qualità di una misurazione. Si tratta di fattori dipendenti dalla struttura dello strumento, dall'accuratezza della sua costruzione, dallo stato di manutenzione, dall'influenza di fattori ambientali, etc. Ne elenchiamo alcuni a titolo di esempio:

- difetti nella taratura (scarsa accuratezza del campione di riferimento, inaccurata procedura di taratura, etc.);
- difetti di calibrazione dello zero (ad es., negli strumenti elettronici lo zero subisce spesso una *deriva* nel tempo);
- attriti o giochi meccanici;

- effetti di grandezze d'influenza diverse dalla grandezza che si vuole misurare, ad es. temperatura, umidità, vibrazioni meccaniche, campi elettrici o magnetici, variazioni della tensione di alimentazione.

In genere, gli effetti di questi diversi fattori sulle prestazioni di uno strumento vengono divisi in due categorie:

- a) Si parla di **errori sistematici** per gli effetti che si riproducono sempre nello stesso modo ogniqualvolta viene ripetuta una misurazione della stessa grandezza fisica.
- b) Si parla di **errori casuali** (o *accidentali*) per gli effetti che si manifestano in modo diverso ed imprevedibile quando la misura di una grandezza fisica viene ripetuta.

Talora è necessario anche considerare la **stabilità**, cioè l'attitudine di uno strumento a fornire risultati poco dispersi in misurazioni ripetute sulla stessa grandezza ad intervalli di tempo lunghi rispetto alla durata di una singola misurazione (ad esempio giorni o settimane).

Con il termine **accuratezza** (in inglese *accuracy*) si fa riferimento alla qualità globale di uno strumento.

L'accuratezza di uno strumento dipende dalla risoluzione di lettura, dall'influenza degli errori sistematici e casuali, dalla stabilità a lungo periodo.

L'accuratezza di uno strumento viene generalmente quotata nel manuale d'uso come un valore numerico di *incertezza* della misura, ossia nella forma $\pm\delta X$.

Se l'accuratezza non viene esplicitamente indicata sullo strumento o nel manuale d'uso, si sottintende che gli effetti degli errori sistematici e casuali e dell'instabilità a lungo periodo sono trascurabili rispetto alla risoluzione ΔX . In tal caso, come abbiamo già visto, si pone generalmente $\delta X = \Delta X/2$.

Esempio: Nei metri a nastro di uso corrente, con risoluzione di lettura $\Delta X = 1$ mm, non viene generalmente indicata l'accuratezza. Ciò significa che il costruttore garantisce che gli errori dovuti allo strumento non sono comunque superiori ad 1 mm.

Esempio: Nel manuale d'uso di un termometro digitale con risoluzione di lettura $\Delta T = 0.1^\circ\text{C}$, l'accuratezza è quotata come $\delta T = \pm 0.4^\circ\text{C}$ tra -25 e $+75^\circ\text{C}$. Evidentemente in questo caso l'incertezza globale δT è maggiore della risoluzione.

In questo paragrafo abbiamo introdotto, in modo piuttosto veloce, alcuni concetti molto importanti per la valutazione dell'accuratezza degli strumenti (effetti di risoluzione, errori casuali, errori sistematici). Come vedremo nel Capitolo 4, l'incertezza di una misura non dipende solo dalle caratteristiche intrinseche degli strumenti utilizzati ma anche da molti altri fattori esterni agli strumenti stessi. Nel Capitolo 4 affronteremo pertanto il problema dell'accuratezza delle misurazioni da un punto di vista più generale, e cercheremo di approfondire in modo sistematico le problematiche introdotte in questo paragrafo.

3.5 Comportamento dinamico degli strumenti

Le *caratteristiche statiche* analizzate nel § 3.3 riassumono le prestazioni degli strumenti per misurazioni di grandezze costanti nel tempo.

In questo paragrafo ci occuperemo, a livello puramente introduttivo, del *comportamento dinamico* degli strumenti, cioè della loro efficienza nella misurazione di grandezze variabili nel tempo.

3.5.1 Grandezze variabili nel tempo

La dipendenza dal tempo di una grandezza fisica può essere di varia natura.

Esempio 1: Consideriamo le oscillazioni di un pendolo. L'ampiezza Φ_0 delle oscillazioni non è costante nel tempo, a causa dello smorzamento dovuto agli attriti; per piccole oscillazioni la

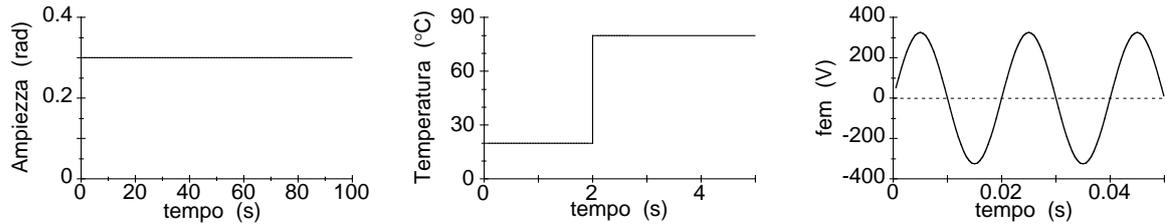


Figura 3.7: Dipendenza dal tempo del valore $X(t)$ di una grandezza fisica. Tre andamenti particolarmente importanti: costante (a sinistra), a gradino (al centro), sinusoidale (a destra).

sua variazione è comunque lenta e generalmente Φ_0 può essere considerata costante per la durata di più periodi di oscillazione (Fig. 3.7, a sinistra).

Esempio 2: Un termometro a mercurio, mantenuto inizialmente in aria alla temperatura $T = 20^\circ\text{C}$, all'istante $t = t_0$ viene immerso in un recipiente contenente acqua alla temperatura $T = 80^\circ\text{C}$. La temperatura T dell'ambiente circostante il termometro varia nel tempo secondo una legge a gradino (Fig. 3.7, al centro):

$$T(t) = \begin{cases} 20^\circ\text{C} & \text{per } t < t_0 \\ 80^\circ\text{C} & \text{per } t \geq t_0 \end{cases}$$

Esempio 3: La differenza di potenziale elettrico delle reti di distribuzione europee varia nel tempo in modo sinusoidale secondo la legge $V(t) = V_0 \sin(\omega t + \phi)$, dove $\omega = 2\pi\nu$ corrisponde ad una frequenza $\nu = 50$ Hz (Fig. 3.7, a destra).

Quando il valore $X(t)$ della grandezza che si vuole misurare non è costante, è necessario che lo strumento utilizzato sia in grado di seguirne con sufficiente velocità le variazioni nel tempo.

Conoscere il comportamento dinamico di uno strumento significa conoscere come varia nel tempo la grandezza in uscita $Z(t)$ al variare della grandezza in ingresso $X(t)$. Quanto più veloci sono le variazioni di $X(t)$, tanto più difficile è ottenere che $Z(t)$ riesca a seguirle con fedeltà.

Gli esempi considerati sopra (andamento costante, a gradino, sinusoidale) sono relativamente semplici. Nella realtà si possono incontrare dipendenze dal tempo anche molto più complicate. Esistono tuttavia tecniche matematiche che consentono di ricondurre qualsiasi funzione periodica o non periodica rispettivamente a una serie (la serie di Fourier) o a un integrale (l'integrale di Fourier) di funzioni sinusoidali di diverse frequenze. Conoscere la relazione tra $X(t)$ e $Z(t)$ per segnali sinusoidali di qualsiasi frequenza significa conoscere la *funzione di risposta* di uno strumento. Lo studio della funzione di risposta di uno strumento consente quindi in linea di principio di conoscerne il comportamento dinamico per qualsiasi tipo di dipendenza dal tempo della grandezza $X(t)$.

3.5.2 Modelli matematici per gli strumenti

Per studiare la relazione tra il valore $X(t)$ in ingresso ad uno strumento e il valore $Z(t)$ in uscita si cerca in genere di costruire un *modello matematico*.

Gli strumenti più semplici sono gli **strumenti di ordine 0**, nei quali la relazione tra $X(t)$ e $Z(t)$ è di diretta proporzionalità

$$a_0 Z = b_0 X \quad \text{cioe' } \quad Z = \frac{b_0}{a_0} X. \quad (3.5.1)$$

La costante di proporzionalità $k = b_0/a_0$ non è altro che la sensibilità statica introdotta al § 3.3. L'eq. (3.5.1) presuppone una risposta istantanea dei valori $Z(t)$ alle variazioni, comunque veloci, dei valori d'ingresso $X(t)$. Lo strumento di ordine zero è evidentemente un modello ideale; può costituire comunque una buona approssimazione per strumenti molto veloci rispetto alle variazioni di $X(t)$.

Negli **strumenti di ordine 1** la relazione tra il valore $X(t)$ della grandezza in ingresso e il valore $Z(t)$ della grandezza in uscita obbedisce ad un'equazione differenziale del primo ordine:

$$a_1 \frac{dZ}{dt} + a_0 Z = b_0 X. \quad (3.5.2)$$

La presenza del termine $a_1 (dZ/dt)$ nell'eq. (3.5.2) implica che le variazioni dei valori in ingresso X non possono venire seguite istantaneamente dai valori in uscita Z . Le variazioni di X si riflettono inizialmente nel termine $a_1 (dZ/dt)$; quanto più piccolo è il coefficiente a_1 , tanto più grande è la derivata (dZ/dt) e tanto più velocemente il valore Z si adeguerà alle variazioni di X .

Negli **strumenti di ordine 2** la relazione tra $X(t)$ e $Z(t)$ è data da un'equazione differenziale del secondo ordine

$$a_2 \frac{d^2 Z}{dt^2} + a_1 \frac{dZ}{dt} + a_0 Z = b_0 X. \quad (3.5.3)$$

L'eq. (3.5.3) è l'equazione del moto di un oscillatore armonico smorzato e forzato.

Generalizzando, si può dire che in molti casi di interesse pratico il modello di uno strumento è descrivibile mediante un'**equazione differenziale lineare a coefficienti costanti**; a primo membro dell'equazione compaiono le derivate rispetto al tempo del valore in uscita $Z(t)$, a secondo membro compare il valore in ingresso $X(t)$:

$$a_n \frac{d^n Z}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} Z}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dZ}{dt} + a_0 Z = b_0 X. \quad (3.5.4)$$

L'ordine dell'equazione differenziale (3.5.4) individua l'*ordine dello strumento*.

Esempio 1: Il termometro a mercurio è descrivibile con un *modello matematico di ordine 1*.

Indichiamo con T la temperatura letta sul termometro (grandezza in uscita), con T_{in} la temperatura del fluido in cui il termometro è immerso (grandezza in ingresso). La differenza tra la temperatura T del bulbo del termometro e la temperatura T_{in} del fluido provoca un flusso di calore Q dal fluido al bulbo secondo la legge

$$\frac{dQ}{dt} = -k \frac{S}{d} (T - T_{in}) \quad (3.5.5)$$

dove: t è il tempo, k è la conducibilità termica del vetro del termometro, S è l'area della superficie del bulbo, d è lo spessore del vetro. L'assorbimento o cessione di calore da parte del bulbo del termometro provoca una variazione di temperatura secondo la legge

$$dQ = C dT \quad (3.5.6)$$

dove C è la capacità termica del mercurio nel bulbo.

Eliminando la quantità di calore Q dalle eq. (3.5.5) e (3.5.6) si ottiene l'equazione differenziale del 1° ordine che lega la grandezza in ingresso T_{in} alla grandezza in uscita T :

$$C \frac{dT}{dt} + k \frac{S}{d} T = k \frac{S}{d} T_{in}. \quad (3.5.7)$$

Esempio 2: Il dinamometro a molla per la misurazione delle forze è descrivibile con un *modello matematico di ordine 2*. La grandezza in ingresso è la forza \mathcal{F} che si vuole misurare, la grandezza in uscita è lo spostamento Z dell'estremità della molla cui viene applicata la forza. Il modello dello strumento è basato sull'equazione del moto $\sum f_i = m (d^2 Z/dt^2)$. Le forze agenti sono, oltre a \mathcal{F} , la forza elastica della molla $F_e = -kZ$ e la forza di attrito viscoso $F_a = -\eta(dZ/dt)$. L'equazione differenziale che collega la grandezza in ingresso \mathcal{F} alla grandezza in uscita Z è del 2° ordine:

$$m \frac{d^2 Z}{dt^2} + \eta \frac{dZ}{dt} + k Z = \mathcal{F}. \quad (3.5.8)$$

Esempio 3: Lo strumento a bobina mobile per la misurazione delle correnti elettriche è descrivibile con un *modello matematico di ordine 2*. La grandezza in ingresso è la corrente elettrica J , la grandezza in uscita è l'angolo ϕ di deviazione dell'indice. Schematicamente lo strumento è costituito da una bobina che può ruotare intorno al suo asse di simmetria, con momento d'inerzia \mathcal{I} . La bobina è immersa in un campo d'induzione magnetica radiale B generato dai due poli di un magnete permanente. Quando la bobina è percorsa da una corrente J , risente di un momento di forza proporzionale al prodotto della corrente per il campo d'induzione magnetica, $\tau_e = cBJ$, cui si oppone un momento di forza elastica proporzionale all'angolo di rotazione, $\tau_e = -k\phi$. Se si tiene conto anche di un momento di forza di smorzamento viscoso, $\tau_v = -\eta(d\phi/dt)$, si ottiene infine l'equazione differenziale del 2° ordine che collega la corrente in ingresso J all'angolo di rotazione in uscita ϕ :

$$\mathcal{I} \frac{d^2\phi}{dt^2} + \eta \frac{d\phi}{dt} + k\phi = (cB)J. \quad (3.5.9)$$

3.5.3 Strumenti di 1° e 2° ordine

Una volta nota la dipendenza dal tempo della grandezza in ingresso $X(t)$, l'andamento $Z(t)$ della grandezza in uscita può essere calcolato risolvendo l'equazione differenziale che descrive lo strumento.

Alcune nozioni di base sulla soluzione (o *integrazione*) delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di 1° e 2° ordine, del tipo (3.5.2) e (3.5.3), sono riportati nel § C.1. Richiamiamo qui di seguito alcuni concetti fondamentali.

Le eq. (3.5.2) e (3.5.3) sono dette *equazioni non omogenee*, in quanto la funzione $X(t)$ a secondo membro è diversa da zero. Uguagliando a zero il secondo membro nelle eq. (3.5.2) e (3.5.3) si ottengono le corrispondenti *equazioni omogenee*.

In generale la soluzione $Z(t)$ di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti è la somma di due funzioni:

$$Z(t) = Z_{\text{tr}}(t) + Z_{\text{st}}(t), \quad (3.5.10)$$

dove

$Z_{\text{tr}}(t)$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea;

$Z_{\text{st}}(t)$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

(Gli indici “tr” e “st” stanno, rispettivamente, per “transitorio” e “stazionario”.)

Le funzioni $Z_{\text{tr}}(t)$, soluzioni delle **equazioni omogenee**, dipendono solo dalla natura dello strumento e non dalla grandezza in ingresso $X(t)$.

Per l'equazione **omogenea del primo ordine**:

$$\frac{dZ}{dt} + \gamma Z = 0; \quad (\gamma = a_0/a_1) \quad (3.5.11)$$

è facile verificare che

$$Z_{\text{tr}}(t) = Z_0 e^{-\gamma t}. \quad (3.5.12)$$

L'equazione **omogenea del secondo ordine** può essere scritta nella forma

$$\frac{d^2Z}{dt^2} + 2\gamma \frac{dZ}{dt} + \omega_0^2 = 0; \quad (2\gamma = a_1/a_2; \quad \omega_0^2 = a_0/a_2). \quad (3.5.13)$$

Si tratta dell'equazione del moto dell'oscillatore armonico non forzato: ω_0 è la frequenza angolare propria, γ è il fattore di smorzamento.

Si hanno tre soluzioni, a seconda che γ è minore, uguale o maggiore di ω_0 :

$$\text{se } \gamma < \omega_0, \quad Z_{\text{tr}}(t) = Z_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega_s t + \phi) \quad (\omega_s^2 = \omega_0^2 - \gamma^2) \quad (3.5.14)$$

$$\text{se } \gamma = \omega_0, \quad Z_{\text{tr}}(t) = (Z_1 + Z_2 t) e^{-\gamma t} \quad (3.5.15)$$

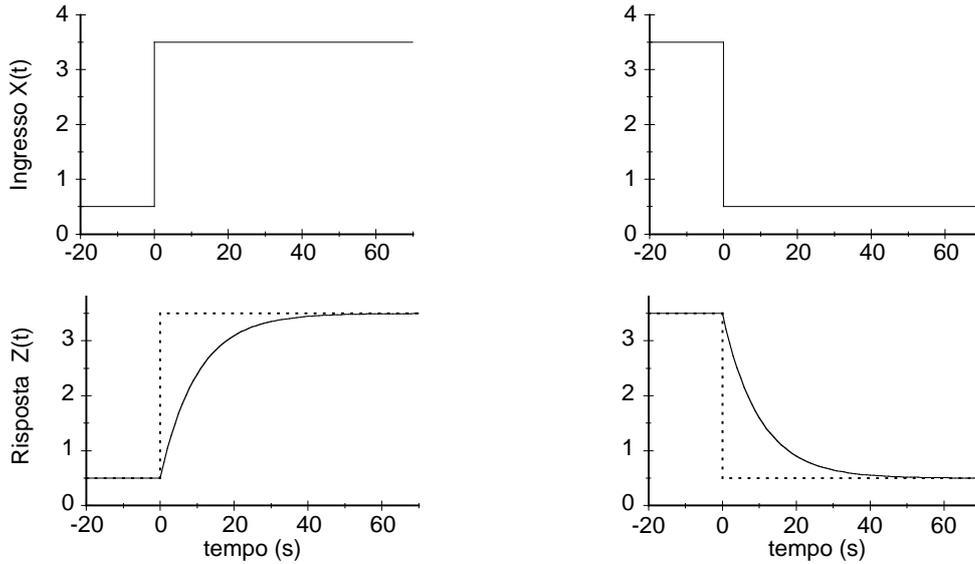


Figura 3.8: Risposta di uno strumento del 1° ordine ad un ingresso a gradino. In alto due possibili ingressi. In basso le corrispondenti risposte (linea continua).

$$\text{se } \gamma > \omega_0, \quad Z_{\text{tr}}(t) = Z_1 e^{-(\gamma-\delta)t} + Z_2 e^{-(\gamma+\delta)t} \quad (\delta = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}) \quad (3.5.16)$$

I parametri γ e ω_0 dipendono dalle caratteristiche dello strumento. I parametri Z_0, Z_1, Z_2 dipendono dalle condizioni iniziali.

Le soluzioni $Z_{\text{tr}}(t)$ contengono sempre un fattore esponenziale negativo di smorzamento, del tipo $\exp(-\gamma t)$. Per $t \rightarrow \infty$ le funzioni $Z_{\text{tr}}(t) \rightarrow 0$, e $Z(t) \rightarrow Z_{\text{st}}(t)$: le soluzioni delle equazioni omogenee hanno perciò un carattere *transitorio*.

Il parametro γ misura la *prontezza* dello strumento, cioè la velocità con cui la soluzione transitoria si spegne e lo strumento si adegua alle variazioni della grandezza in ingresso. L'inverso di γ , cioè $\tau = 1/\gamma$, ha le dimensioni di un tempo ed è chiamato *costante di tempo* dello strumento. Il fattore di smorzamento esponenziale viene spesso espresso nella forma: $\exp(-t/\tau)$.

Le soluzioni particolari Z_{st} delle **equazioni non omogenee** (3.5.3) e (3.5.4) dipendono dalla forma della funzione $X(t)$ in ingresso. Le soluzioni Z_{st} descrivono l'andamento *stazionario*, asintotico per $t \rightarrow \infty$.

3.5.4 Risposta ad un ingresso a gradino

Consideriamo a titolo di esempio il caso in cui la grandezza da misurare ha una dipendenza dal tempo descritta da una funzione a gradino (Fig. 3.5, al centro):

$$X(t) = \begin{cases} X_0 & \text{per } t < t_0 \\ X_1 & \text{per } t > t_0 \end{cases} \quad (3.5.17)$$

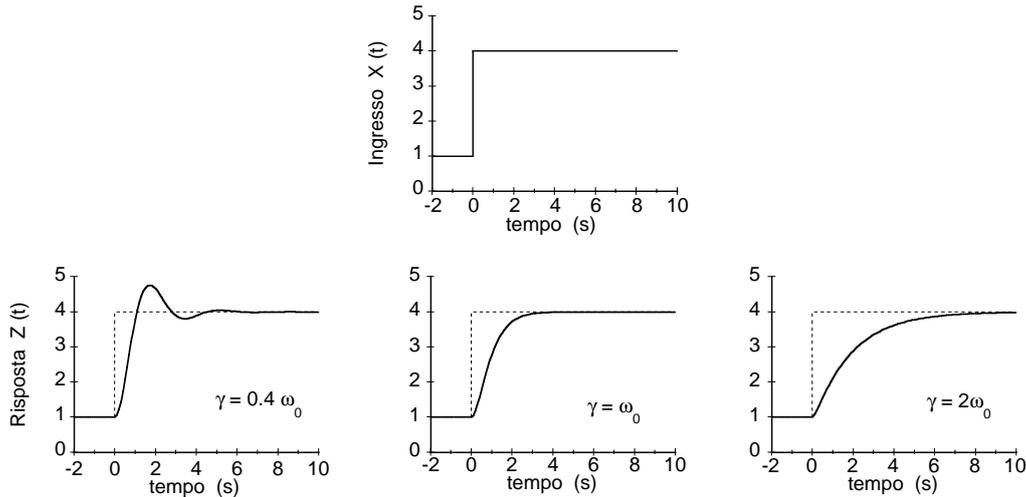


Figura 3.9: Risposta di uno strumento del 2° ordine ad un ingresso a gradino. In alto l'ingresso $X(t)$. Per semplicità si è posta la sensibilità statica $(b_0/a_0) = 1$. In basso le risposte $Z(t)$ per $\gamma = 0.4\omega_0$ (a sinistra), $\gamma = \omega_0$ (al centro), $\gamma = 2\omega_0$ (a destra). Se $\gamma = \omega_0$ si parla di smorzamento critico.

e supponiamo che per $t < 0$ lo strumento abbia avuto il tempo di stabilizzarsi alla risposta stazionaria $Z = (b_0/a_0) X_0$.

Esempio 1: Un termometro a mercurio, inizialmente in equilibrio in un ambiente alla temperatura T_0 , all'istante $t = 0$ viene immerso in un fluido alla temperatura T_1 .

Esempio 2: Ad un dinamometro disposto in verticale, inizialmente scarico, viene appesa all'istante $t = 0$ una massa m .

Esempio 3: All'istante $t = 0$ i morsetti d'ingresso di un voltmetro a bobina mobile vengono collegati ad una sorgente di forza elettromotrice costante.

Studiamo cosa succede per $t > 0$. Se lasciamo passare un tempo sufficientemente lungo, al limite per $t \rightarrow \infty$, la soluzione transitoria $Z_{tr}(t)$ si spegne e rimane la soluzione stazionaria

$$Z_{st} = \frac{b_0}{a_0} X_1 \quad (3.5.18)$$

uguale per gli strumenti del 1° e del 2° ordine.

Sommiamo ora le due soluzioni transitoria e stazionaria.

Per gli **strumenti del 1° ordine** la soluzione transitoria $Z_{tr}(t)$ (eq. 3.5.12) contiene la costante Z_0 dipendente dalle condizioni iniziali. La costante Z_0 può essere determinata studiando il comportamento di $Z(t)$ in corrispondenza del gradino in ingresso per $t = 0$ (vedi Appendice C.1):

$$Z(t) = \frac{b_0}{a_0} (X_0 - X_1) e^{-t/\tau} + \frac{b_0}{a_0} X_1. \quad (3.5.19)$$

Il valore in uscita $Z(t)$ si avvicina con andamento esponenziale al valore stazionario (Fig. 3.8).

Per gli **strumenti del 2° ordine** le soluzioni transitorie $Z_{tr}(t)$ (eq. 3.5.13,14,15) contengono due costanti (Z_0 e ϕ oppure Z_1 e Z_2), che possono venire determinate studiando il comportamento sia di $Z(t)$ che della sua derivata prima dZ/dt in corrispondenza del gradino in ingresso per $t = 0$ (vedi Appendice C.1).

Si hanno tre tipi di comportamento, a seconda che $\gamma < \omega_0$, $\gamma = \omega_0$ oppure $\gamma > \omega_0$ (Fig. 3.9).

Per $\gamma < \omega_0$ la risposta $Z(t)$ oscilla intorno al valore asintotico $Z_{st}(t)$; le oscillazioni si smorzano tanto più velocemente quanto più γ è vicino a ω_0 .

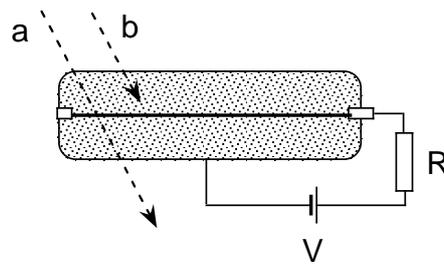


Figura 3.10: Rappresentazione schematica di un contatore Geiger. Recipiente e filamento centrale sono mantenuti ad una differenza di potenziale V . Le tracce a e b rappresentano le traiettorie di due particelle di alta energia.

Per $\gamma > \omega_0$ la risposta $Z(t)$ si avvicina esponenzialmente al valore asintotico $Z_{st}(t)$ senza mai oltrepassarlo; l'avvicinamento è tanto più veloce quanto più γ è vicino a ω_0 .

Per $\gamma = \omega_0$ si ha la condizione ideale, detta di *smorzamento critico*: la risposta $Z(t)$ si avvicina al valore asintotico $Z_{st}(t)$ nel modo più veloce, senza però oltrepassarlo.

3.6 Dispositivi di conteggio

Nei paragrafi precedenti di questo Capitolo ci siamo occupati degli strumenti per la misurazione diretta di grandezze fisiche (lunghezze, intervalli di tempo, masse, differenze di potenziale elettrico, etc.) A questo tipo di strumenti si fa ricorso anche per grandezze non misurabili direttamente, come la temperatura, sfruttando relazioni analitiche che le legano a grandezze misurabili direttamente.

Gli strumenti di cui ci siamo finora occupati non esauriscono però le esigenze dei laboratori di Fisica. Come abbiamo già osservato al § 1.5, esistono fenomeni fisici che si manifestano come eventi distribuiti casualmente nello spazio e/o nel tempo (si riveda la Fig. 1.3, a destra). Esempi tipici sono i decadimenti di isotopi radioattivi o le collisioni tra particelle elementari.

Sempre al § 1.5 abbiamo anche osservato che, a dispetto dell'assoluta casualità di questi fenomeni (o forse, come vedremo più avanti, sarebbe meglio dire proprio in ragione dell'assoluta casualità), se si osserva un numero sufficientemente elevato di eventi, è comunque possibile estrarre delle proprietà medie regolari e significative. Queste proprietà medie rappresentano delle grandezze fisiche, di fondamentale importanza in molti campi della Fisica moderna. Un esempio tipico di tali grandezze è la costante di disintegrazione di un particolare tipo di isotopo radioattivo.

È naturale quindi che si siano sviluppati strumenti specificamente destinati alla misura delle grandezze fisiche legate agli eventi casuali. Tali strumenti si basano evidentemente sul conteggio degli eventi casuali, e presentano principi di funzionamento e specifiche di prestazione peculiari.

Esempio: Un tipico esempio è rappresentato dal *contatore Geiger*, utilizzato per il conteggio di particelle di alta energia (ad esempio raggi cosmici o prodotti di decadimenti radioattivi).

Il dispositivo è costituito (Fig. 3.10) da un recipiente metallico riempito di gas e contenente un filamento di tungsteno. Recipiente e filamento vengono mantenuti a potenziale elettrico diverso. Una particella di alta energia può colpire e ionizzare una o più molecole del gas, provocando una reazione a valanga di ionizzazioni secondarie. Gli elettroni così prodotti vengono raccolti dal filamento (anodo) e danno luogo ad un segnale impulsivo, sotto forma di una differenza di potenziale ai capi del resistore R .

Uno strumento di conteggio (come il contatore Geiger dell'esempio precedente) trasforma ogni evento casuale in un segnale elettrico impulsivo. Il numero di segnali elettrici viene poi contato, mediante opportuni circuiti elettronici, per un prefissato intervallo di tempo.

È dal numero di conteggi per unità di tempo che si possono ricavare i valori delle grandezze fisiche rilevanti per il fenomeno che si sta studiando. Allo scopo, avendo a che fare con fenomeni di natura casuale, sono necessarie peculiari metodologie di tipo probabilistico, che verranno introdotte più avanti; in particolare, i fenomeni di conteggio verranno trattati in dettaglio al § 6.4, in connessione con lo studio della distribuzione di Poisson. Anche le grandezze fisiche estratte dal conteggio di

fenomeni casuali sono affette da incertezza. L'incertezza di natura puramente statistica, dovuta all'aleatorietà dei fenomeni, verrà pure studiata al § 6.4.

Qui ci limitiamo ad osservare che anche i dispositivi di conteggio possono introdurre distorsioni, e quindi incertezze. Senza entrare in troppi dettagli tecnici, ricordiamo che non tutti gli eventi casuali vengono trasformati in segnali impulsivi in uscita dallo strumento.

- a) Alcuni eventi possono sfuggire del tutto alla rivelazione (nel caso del contatore Geiger, una particella può casualmente attraversare indisturbata il dispositivo, e quindi non venire rilevata).
- b) Due o più eventi si possono presentare contemporaneamente al dispositivo, ed essere conteggiati come un unico evento.
- c) Dopo la rilevazione di un evento casuale, il dispositivo richiede un intervallo di tempo (detto *tempo morto*) prima di essere in grado di rilevare un nuovo evento. Eventi separati da un intervallo di tempo inferiore al tempo morto non vengono distinti.

Si definisce come *efficienza di rivelazione* il rapporto tra il numero medio di eventi rilevati dal dispositivo di conteggio e il numero medio di eventi che si sono comunque verificati:

$$\text{efficienza di rivelazione} = \frac{\text{eventi contati}}{\text{eventi avvenuti}}.$$

Capitolo 4

Incertezza delle misure

Abbiamo visto fin dal Capitolo 1 che il risultato della misurazione di una grandezza fisica non è mai un ben definito valore numerico, bensì sempre un *intervallo di valori*. Ciò significa che la misura è sempre affetta da *incertezza* (o *indeterminazione*, in inglese *uncertainty*). In questo Capitolo studieremo approfonditamente le origini dell'incertezza di misura e le modalità per il suo trattamento nelle situazioni più frequentemente incontrate in laboratorio.

Inizieremo individuando varie possibili cause di incertezza nelle *misurazioni dirette* (§ 4.1). Introduciamo le diverse tecniche usate per valutare ed esprimere l'incertezza dovuta alla risoluzione di misura (§ 4.2), l'incertezza dovuta agli errori casuali (§ 4.3) e l'incertezza connessa con gli errori sistematici (§ 4.4). Mostreremo infine come è possibile confrontare in modo coerente le incertezze dovute a cause diverse, ed eventualmente sommarle (§ 4.5).

Ci occuperemo poi della valutazione dell'incertezza nelle *misurazioni indirette*, ossia della propagazione dell'incertezza dalle misure dirette alle misure indirette (§ 4.6).

Affronteremo infine, a livello introduttivo, il problema della *correlazione tra grandezze fisiche*, soffermandoci sul caso in cui due grandezze siano possibilmente legate da una relazione lineare; studieremo come calcolare i parametri della relazione lineare a partire dai dati sperimentali tenendo nel debito conto le loro incertezze di misura (§ 4.7).

Alcune tecniche di trattamento dei dati sperimentali verranno introdotte in questo Capitolo 4 in modo puramente fenomenologico. Una loro giustificazione più rigorosa verrà affrontata al Capitolo 7.

4.1 Cause di incertezza

Al § 3.4 abbiamo collegato l'incertezza δX di una misura alla risoluzione di lettura ΔX dello strumento utilizzato. Abbiamo inoltre osservato che l'incertezza può essere influenzata anche da altre cause attribuibili allo strumento, di natura sia sistematica che casuale.

Le caratteristiche dello strumento di misura non sono però le uniche cause che influenzano il risultato di una misurazione. In generale, il risultato di una misurazione (e di conseguenza la sua incertezza δX) può dipendere da diversi fattori:

- difficoltà di definizione della grandezza da misurare;
- caratteristiche operative dello strumento (già discusse nel Cap. 3);
- interazione tra lo strumento e l'oggetto della misurazione;
- interazione tra lo strumento e il soggetto sperimentatore;
- metodologia della misurazione;
- ambiente in cui viene fatta la misurazione.

Esempio: Se si misura lo spessore di una lamina con un micrometro centesimale (risoluzione $\Delta X = 0.01$ mm) il risultato della misurazione può essere influenzato dalla presenza di corpi estranei, ad esempio polvere, tra gli steli del micrometro e l'oggetto (*interazione tra strumento ed*

oggetto). Utilizzare un micrometro in acciaio tarato alla temperatura di 20°C per eseguire misurazioni a temperature molto più basse o molto più alte può causare errori di misura non trascurabili (*influenza dell'ambiente*). Lo spessore stesso della lamina può variare a seconda della zona in cui viene misurato (*difficoltà di definizione della grandezza fisica*).

Esempio: Si vuol misurare il periodo di oscillazione di un pendolo con un cronometro centesimale (risoluzione $\Delta t = 0.01$ s) comandato manualmente. Il risultato della misurazione dipenderà dalla prontezza di riflessi dello sperimentatore (*interazione tra strumento e sperimentatore*). Il risultato potrà inoltre essere diverso se vien misurata la durata di un singolo periodo oppure la durata di 10 periodi, dividendo poi il risultato per 10 (*metodologia della misurazione*).

Generalizzando i concetti già introdotti al § 3.4, i diversi fattori che di volta in volta influenzano una misura e ne determinano l'incertezza possono essere classificati in tre gruppi:

- **risoluzione della misura,**
- **errori casuali,**
- **errori sistematici.**

Nei tre paragrafi seguenti impareremo separatamente a valutare l'incertezza dovuta a ciascuno di questi tre gruppi di fattori. Nel § 4.5 introdurremo una procedura unificata per esprimere in modo consistente e confrontabile le incertezze dovute a cause diverse.

Nota: Come vedremo, i termini *errore casuale* ed *errore sistematico* hanno un ben definito significato nel contesto delle misurazioni fisiche. Essi non vanno confusi con i comuni *sbagli*, o *errori parassiti*, dovuti a distrazione o imperizia (ad es., lo scambio di una massa da 50 g per una da 100 g durante una pesata, l'errata lettura del visualizzatore di uno strumento, un errore di calcolo in una misurazione indiretta). Quantunque potenzialmente influenti, gli errori parassiti non sono suscettibili di una trattazione formale, e non verranno quindi presi in considerazione nel seguito. La loro presenza dev'essere comunque evitata preparando con cura gli esperimenti e lavorando con la massima attenzione.

4.2 Risoluzione della misura

4.2.1 Risoluzione dello strumento e risoluzione della misura

Nel § 3.4 ci siamo occupati a livello introduttivo dell'incertezza dovuta alla risoluzione di lettura dello strumento, ΔX_s , considerando alcuni esempi relativi all'uso di strumenti analogici e digitali. Volendo ora approfondire l'argomento, è bene introdurre il concetto più generale di *risoluzione della misura*, ΔX_m .

In realtà, la risoluzione della misura coincide spesso con la risoluzione di lettura dello strumento.

Esempio 1: Si misura il diametro di un tubo con un calibro ventesimale. La risoluzione della misura coincide con la risoluzione di lettura dello strumento: $\Delta X_m = \Delta X_s = 0.05$ mm.

Esempio 2: Si misura la durata del periodo di oscillazione di un pendolo con un cronometro digitale centesimale. Anche in questo caso la risoluzione della misura è uguale alla risoluzione di lettura dello strumento, $\Delta X_m = \Delta X_s = 0.01$ s.

Talora però la risoluzione di misura può essere ridotta, rispetto alla risoluzione di lettura dello strumento, adottando opportune *metodologie di misurazione*. Tipicamente, anziché misurare direttamente la grandezza X , se ne misura un multiplo nX . La risoluzione di lettura ΔX_s dello strumento va pertanto riferita al valore globale di misura nX ; la risoluzione della misura X è quindi n volte inferiore a quella dello strumento: $\Delta X_m = \Delta X_s/n$.

Esempio 3: Si vuole misurare il periodo di oscillazione \mathcal{T} di un pendolo con un cronometro centesimale (la risoluzione dello strumento è quindi $\Delta t_s = 0.01$ s). Allo scopo, si misura la durata complessiva ΔT di $n = 10$ oscillazioni consecutive, per cui il periodo si ricava come $\mathcal{T} = \Delta T/10$.

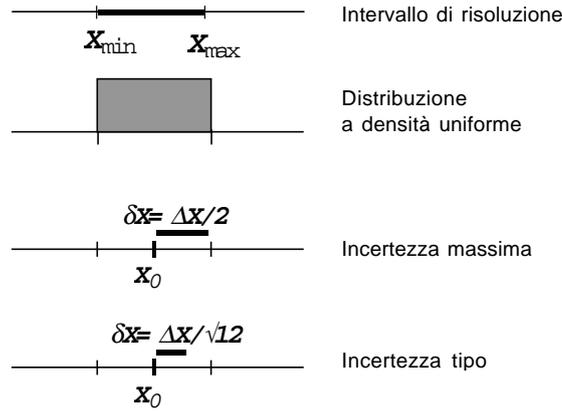


Figura 4.1: Rappresentazione grafica del collegamento tra intervallo di risoluzione e distribuzione a densità uniforme, nonché della differenza tra *incertezza massima* e *incertezza tipo*.

La risoluzione della misura del periodo \mathcal{T} è pertanto $n=10$ volte inferiore della risoluzione dello strumento: $\Delta t_m = \Delta t_s / n = \Delta t_s / 10 = 0.001$ s.

Esempio 4: Si vuole misurare lo spessore medio delle pagine di un libro usando una riga millimetrata ($\Delta X_s = 1$ mm). Allo scopo si misura lo spessore complessivo di $n=100$ pagine, ottenendo $nX = 12$ mm, per cui $X = 0.12$ mm. La risoluzione di misura è $\Delta X_m = \Delta X_s / 100 = 0.01$ mm.

4.2.2 Incertezza dovuta alla risoluzione

Il risultato della misurazione di una grandezza fisica è un intervallo di valori di estensione corrispondente alla risoluzione di misura ΔX , compreso tra due valori X_{\min} e X_{\max} :

$$X_{\min} \leq X \leq X_{\max}. \quad (4.2.1)$$

Tutti i valori all'interno dell'intervallo sono equivalenti, in quanto la misurazione non è in grado di distinguerli. Possiamo anche dire che tutti i valori di X compresi nell'intervallo sono *equiprobabili*, ovvero che i valori sono distribuiti all'interno dell'intervallo con *densità di probabilità uniforme*. La rappresentazione grafica della densità uniforme è un rettangolo di larghezza ΔX ed area unitaria (Fig. 4.1). (I concetti di probabilità e distribuzione di probabilità, introdotti qui in modo intuitivo, verranno affrontati in modo più rigoroso e sistematico nei Capitoli 5 e 6).

Come abbiamo già visto al § 3.4, il risultato della misurazione viene espresso nella forma

$$X = X_0 \pm \delta X, \quad (4.2.2)$$

dove (si riveda sempre il § 3.4):

X_0 è il valore centrale dell'intervallo di risoluzione;

δX rappresenta l'*incertezza* della misura.

Una scelta ragionevole per esprimere l'incertezza δX della misura è rappresentata dalla la semi-larghezza dell'intervallo di risoluzione (Fig. 4.1):

$$\delta X_{\text{ris}} = \Delta X / 2. \quad (4.2.3)$$

Poiché l'incertezza δX definita dall'eq. (4.2.3) abbraccia tutti i possibili valori X compresi nell'intervallo di risoluzione, la chiameremo **incertezza massima** (inglese *maximum uncertainty*).

Al § 4.5 riprenderemo in considerazione il modo di esprimere l'incertezza dovuta alla risoluzione. Mostreremo allora che, per garantire un confronto consistente con l'incertezza dovuta agli errori casuali, in molti casi è preferibile una scelta convenzionale, diversa dall'eq. (4.2.3), e precisamente (Fig. 4.1)

$$\delta X_{\text{ris}} = \Delta X / \sqrt{12}. \quad (4.2.4)$$

Poiché la definizione di incertezza rappresentata dall'eq. (4.2.4) fa riferimento ad esigenze di consistenza e confrontabilità con altre forme di incertezza, parleremo in questo caso di **incertezza tipo** (in inglese *standard uncertainty*).

Incetezza massima ed incetezza tipo hanno significati diversi, ed i loro valori numerici sono diversi. È quindi necessario specificare sempre esplicitamente se il valore δX corrisponde a incetezza massima o incetezza tipo.

Esempio 1: Si misura l'altezza di un tavolo con un metro da falegname. La risoluzione è $\Delta X = 1$ mm. Ponendo l'estremità del metro sul pavimento, il piano del tavolo risulta situato tra le tacche corrispondenti a 827 e 828 mm. Il risultato della misurazione sarà espresso come $X = (827.5 \pm 0.5)$ mm se si usa l'eq. (4.2.3), come $X = (827.5 \pm 0.3)$ mm se si usa l'eq. (4.2.4).

Esempio 2: Si misura la durata del periodo di oscillazione \mathcal{T} di un pendolo con un cronometro digitale centesimale. La risoluzione è $\Delta t = 0.01$ s. Sul visualizzatore compare il valore 1.75 s. Il risultato della misurazione sarà espresso come $\mathcal{T} = (1.75 \pm 0.005)$ s se si usa l'eq. (4.2.3), come $\mathcal{T} = (1.75 \pm 0.003)$ s se si usa l'eq. (4.2.4).

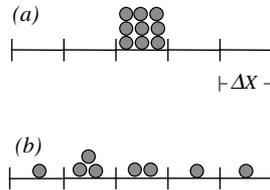
Come si può facilmente verificare, in entrambi gli esempi l'incetezza calcolata secondo l'eq. (4.2.4) è stata espressa in modo arrotondato. *Non ha infatti significato esprimere l'incetezza di misura con più di una o due cifre significative.* Una trattazione dettagliata sull'uso delle cifre significative e degli arrotondamenti, in particolare nell'espressione delle misure, è fatta al § A.1.

4.3 Errori casuali

4.3.1 Misurazioni ripetute

Supponiamo di ripetere più volte la misurazione di una stessa grandezza fisica costante nel tempo. Si possono presentare due casi:

- misure successive cadono nello stesso intervallo di risoluzione;
- misure successive cadono in modo casuale e imprevedibile in intervalli di risoluzione differenti.



Esempio 1: Si misura l'altezza di un foglio di quaderno con una riga millimetrata. La risoluzione è $\Delta X = 1$ mm. Ripetendo più volte la misurazione si ottengono valori compresi sempre entro lo stesso intervallo di risoluzione (caso a).

Esempio 2: Si misura il periodo di oscillazione di un pendolo con un cronometro digitale centesimale azionato manualmente. La risoluzione è $\Delta t = 0.01$ s. Ripetendo la misurazione si ottengono valori di volta in volta diversi, che cadono in diversi intervalli di risoluzione (caso b).

Nel caso (a) l'incetezza δX del valore di misura è legata direttamente alla risoluzione ΔX ; come abbiamo visto al §4.2 si porrà, a seconda dei casi, $\delta X_{\text{ris}} = \Delta X/2$ (incetezza massima), oppure $\delta X = \Delta X_{\text{ris}}/\sqrt{12}$ (incetezza tipo).

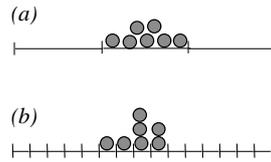
Nel caso (b) le discrepanze tra misurazioni diverse della stessa grandezza sono da attribuire all'azione simultanea e casuale di molti piccoli fattori, ciascuno dei quali influisce in modo diverso su ogni singola misura. Ad esempio:

- errori di lettura: carenza di potere separatore dell'occhio, errori di parallasse, errori di interpolazione, errori di sincronizzazione, etc.;
- rumore di fondo, cioè l'effetto di variazioni molto piccole e casuali delle grandezze d'influenza (temperatura, pressione, umidità, vibrazioni, etc.);

- errori d'inversione (differenza tra misure eseguite mentre il valore della grandezza sta crescendo oppure sta diminuendo).

Si dice in questo caso che le misure sono affette da **errori casuali** (ingl. *random errors*), che provocano un'incertezza superiore a quella dovuta alla risoluzione.

In realtà, si può assumere che gli errori casuali siano sempre presenti in una misurazione. Il loro effetto però non appare se è globalmente inferiore alla risoluzione della misura (caso *a*). Se tuttavia la risoluzione viene convenientemente ridotta, utilizzando uno strumento con risoluzione inferiore o modificando la metodologia della misurazione, l'effetto degli errori casuali diviene comunque evidente (caso *b*).



Nel resto di questo § 4.3 ci occuperemo solo di casi in cui l'effetto degli errori casuali prevale sulla risoluzione della misura, ed affronteremo il seguente problema: come si può valutare quantitativamente l'incertezza dovuta agli errori casuali, in modo da poter ancora esprimere il risultato di una misurazione nella forma $X_0 \pm \delta X$?

A questo scopo, dovremo prima imparare alcune tecniche per la visualizzazione ed il trattamento dei dati sperimentali (istogrammi e loro parametri statistici, § 4.3.2 e 4.3.3) e quindi introdurre il concetto fondamentale di distribuzione limite (§ 4.3.4 e 4.3.5).

4.3.2 Istogrammi

Supponiamo di avere misurato N volte la stessa grandezza fisica X . Il risultato di ogni misurazione sarà individuato da un indice i ($i = 1 \dots N$) e da un valore x_i che rappresenta il centro dell'intervallo di risoluzione corrispondente alla misura i -ma.

Può succedere che misure diverse (valori diversi dell'indice i) cadano nello stesso intervallo di risoluzione. Per rappresentare convenientemente questa situazione si disegna in genere un **istogramma** (vedi Fig. 4.2, ulteriori informazioni sugli istogrammi si possono trovare nel § A.4). Ogni colonna dell'istogramma ha una base di larghezza ΔX pari alla risoluzione delle misure. Individueremo le colonne dell'istogramma con un indice j . L'altezza della colonna j -ma sarà proporzionale al numero n_j^* di valori di misura caduti nell'intervallo j -mo (Fig. 4.2, a sinistra). Se indichiamo con \mathcal{N} il numero di colonne dell'istogramma, è evidente che

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} n_j^* = N. \quad (4.3.1)$$

L'altezza delle colonne di un istogramma dipende dal numero totale N di misure. Per confrontare istogrammi relativi a numeri N di misure diversi è conveniente normalizzarli in altezza. In un **istogramma normalizzato in altezza** (Fig. 4.2, a destra) l'altezza di ogni colonna è proporzionale alla *frequenza campionaria*

$$p_j^* = n_j^*/N. \quad (4.3.2)$$

È facile verificare che, qualunque sia il numero N di misure,

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} p_j^* = 1. \quad (4.3.3)$$

Talvolta può essere necessario confrontare due insiemi di misurazioni della stessa grandezza eseguiti con risoluzioni diverse. I due istogrammi hanno colonne con basi ΔX diverse. È allora necessario

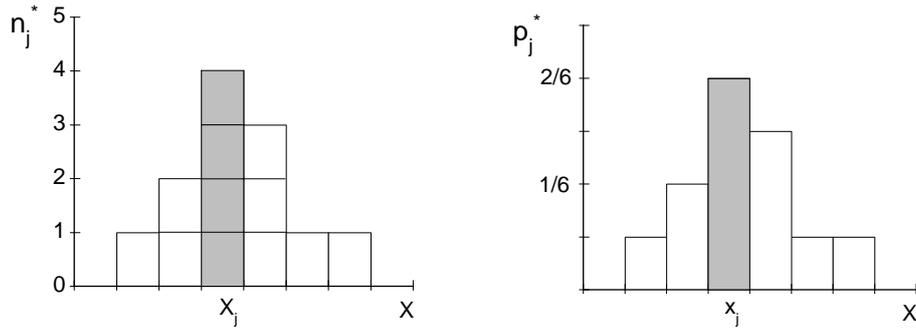


Figura 4.2: A sinistra: un istogramma relativo a $N=12$ misure; l'altezza della colonna j -ma rappresenta il numero n_j^* di misure con valore x_j . A destra: il corrispondente istogramma normalizzato in altezza; l'altezza della colonna j -ma rappresenta la frequenza campionaria $p_j^* = n_j^*/N$

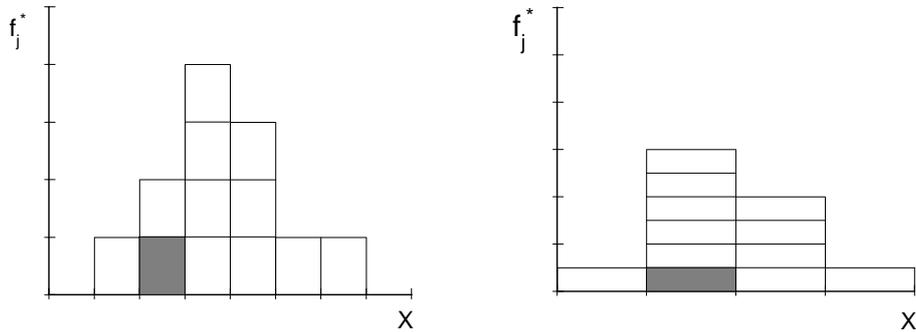


Figura 4.3: Confronto tra due istogrammi normalizzati in area. I due istogrammi si riferiscono allo stesso insieme di misure: nell'istogramma di destra le misure sono state raggruppate in colonne di larghezza doppia rispetto alle colonne dell'istogramma di sinistra.

ricorrere alla normalizzazione in area. In un **istogramma normalizzato in area** (Fig. 4.3) l'altezza di ogni colonna è proporzionale alla *densità campionaria*

$$f_j^* = \frac{n_j^*}{N \Delta X_j}. \quad (4.3.4)$$

È facile verificare che, qualunque sia il numero N di misure, l'area totale delle colonne è sempre unitaria:

$$\sum_{j=1}^N f_j^* \Delta X_j = 1. \quad (4.3.5)$$

Nota 1: Il significato dell'aggettivo *campionario* sarà chiarito più avanti in questo stesso paragrafo.

Notiamo comunque fin d'ora che in questo testo l'asterisco (*) indica sempre, per convenzione, quantità campionarie.

Nota 2: La frequenza campionaria p^* è sempre una quantità adimensionale. La densità campionaria f^* , definita dall' Eq. (4.3.4), ha invece sempre le dimensioni dell'inverso della grandezza X .

4.3.3 Parametri statistici di un istogramma

Un istogramma contiene tutta l'informazione ottenibile da un insieme di N misurazioni di una grandezza fisica. In molti casi, ad esempio per esprimere il risultato di una misurazione affetta da errori casuali, è sufficiente sintetizzare le principali caratteristiche di un istogramma per mezzo di pochi parametri numerici. Ci limiteremo qui a considerare due soli parametri: il primo individua la

posizione media dell'istogramma sull'asse dei valori x della grandezza fisica, il secondo descrive la **dispersione** dei valori misurati.

Parametro di posizione

La **posizione** dell'istogramma (Fig. 4.4, a sinistra) è individuata dal **valor medio campionario** m^* (in inglese *sample mean*), calcolato come la media aritmetica degli N valori x_i misurati:

$$m^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (4.3.6)$$

Alternativamente possiamo eseguire la somma, anziché su tutti gli N valori misurati, sulle N colonne dell'istogramma, caratterizzate dalle frequenze campionarie p_j^* :

$$m^* = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j n_j^* = \sum_{j=1}^N x_j \frac{n_j^*}{N} = \sum_{j=1}^N x_j p_j^*. \quad (4.3.7)$$

Nota: Esistono vari modi alternativi per indicare simbolicamente il valor medio di un insieme di valori x_i . Nel seguito considereremo equivalenti le seguenti scritte:

$$m^* \equiv m_x^* \equiv \langle x \rangle \equiv \mathbf{m}^*[x]$$

e di volta in volta utilizzeremo quella che garantisce la migliore chiarezza di lettura delle formule.

Parametri di dispersione

Per misurare la **dispersione** dell'istogramma è utile definire, per ogni valore misurato x_i , il suo **scarto** s_i (in inglese *deviation*) rispetto al valor medio campionario:

$$s_i = x_i - m^*. \quad (4.3.8)$$

Il valor medio degli scarti s_i non serve per misurare la dispersione di un istogramma, in quanto, come è facile verificare, il suo valore è identicamente nullo:

$$\langle s \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i - \frac{1}{N} N m^* = 0. \quad (4.3.9)$$

Una misura convenzionale della dispersione di un istogramma è data dalla **varianza campionaria** D^* (ingl. *sample variance*), definita come il valor medio dei quadrati degli scarti s_i^2 . Come il valor medio campionario, anche la varianza campionaria può essere calcolata sommando su tutti gli N valori misurati oppure sulle N colonne dell'istogramma:

$$D^* = \langle (x_i - m^*)^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*)^2 = \sum_{j=1}^N (x_j - m^*)^2 p_j^*. \quad (4.3.10)$$

La varianza campionaria D^* ha le dimensioni del quadrato della grandezza misurata X . Per visualizzare direttamente la dispersione di un istogramma è utile una quantità che abbia le stesse dimensioni della grandezza X . Si introduce pertanto lo **scarto quadratico medio campionario** o anche **scarto tipo campionario** (in inglese *sample standard deviation*) σ^* , definito come la radice quadrata della varianza (Fig. 4.4, a destra):

$$\sigma^* = \sqrt{D^*} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*)^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^N (x_j - m^*)^2 p_j^*}. \quad (4.3.11)$$

Esempio: Vengono eseguite $N=20$ misurazioni del periodo di oscillazione di un pendolo con un cronometro digitale centesimale, cioè con risoluzione di lettura $\Delta T=0.01$ s. I risultati sono riassunti nella seguente tabella.

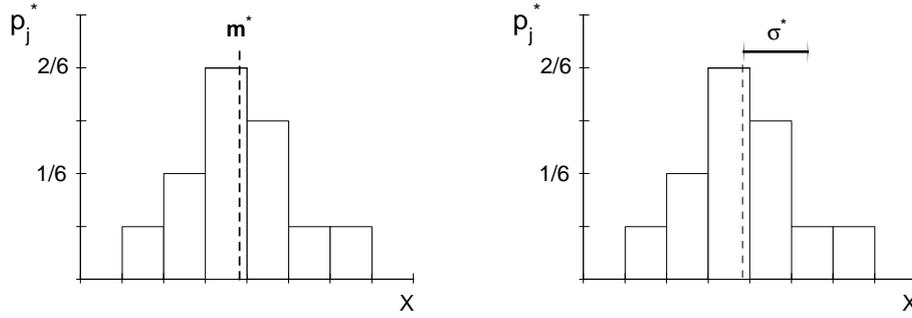


Figura 4.4: Valor medio (a sinistra) e scarto quadratico medio (a destra) di un istogramma.

T_j [s]	n_j^*	p_j^*	f_j^* [s ⁻¹]
1.22	1	0.05	5
1.23	2	0.1	10
1.24	4	0.2	20
1.25	6	0.3	30
1.26	3	0.15	15
1.27	3	0.15	15
1.28	1	0.05	5
Σ	20	1.00	100

Il valor medio campionario, la varianza campionaria e lo scarto quadratico medio campionario sono rispettivamente: $m^* = 1.25$ s, $D^* = 2.25 \times 10^{-4}$ s², $\sigma^* = 1.5 \times 10^{-2}$ s.

È facile vedere che la varianza D^* è la differenza tra il valor medio dei valori x_i^2 ed il quadrato del valor medio dei valori x_i . Infatti

$$D^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [x_i^2 - 2x_i \langle x \rangle + \langle x \rangle^2] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (4.3.12)$$

L'uso dell'espressione (4.3.12) in alternativa all'espressione (4.3.10) può talvolta rendere più veloci i calcoli della varianza D^* e quindi dello scarto quadratico medio σ^* .

4.3.4 Distribuzione limite

Come abbiamo visto, il risultato di N misurazioni affette da errori casuali può essere rappresentato da un istogramma oppure, in modo meno completo ma più sintetico, dai due parametri m^* e σ^* che ne rappresentano rispettivamente la posizione media e la dispersione rispetto all'asse dei valori x .

Supponiamo ora di eseguire un nuovo insieme di N misurazioni della stessa grandezza X ; ci aspettiamo di ottenere un istogramma diverso dal precedente, con valori m^* e σ^* pure diversi. Eseguendo altri insiemi di N misurazioni otterremo istogrammi ancora diversi e valori diversi di m^* e σ^* . Possiamo dire che l'istogramma relativo a N misurazioni ed i suoi parametri statistici m^* e σ^* hanno carattere aleatorio, cioè casuale.

Si verifica però sperimentalmente che, al crescere del numero N di misure per ogni istogramma, gli istogrammi relativi a insiemi diversi di misurazioni tendono ad assumere forma simile (Fig. 4.5); corrispondentemente, le differenze tra i valori di m^* e di σ^* relativi a istogrammi diversi tendono a ridursi. Queste osservazioni hanno portato ad introdurre il concetto di **istogramma limite**, a cui tendono ad assomigliare i singoli istogrammi sperimentali al crescere del numero di misure N . In termini asintotici, si dice che un istogramma sperimentale tende all'istogramma limite per $N \rightarrow \infty$.

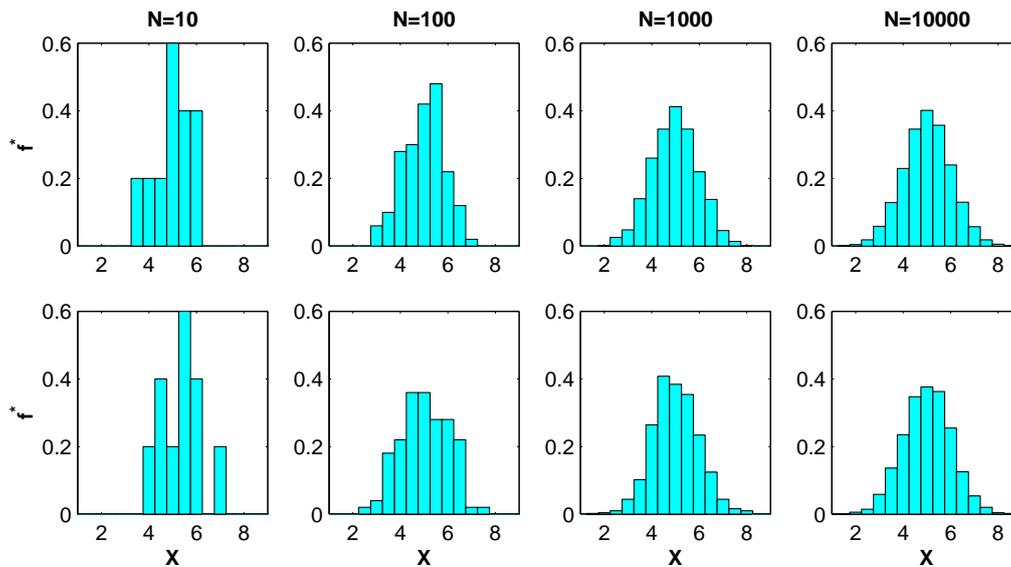


Figura 4.5: Otto istogrammi, normalizzati in area, relativi a diverse misurazioni di una stessa grandezza fisica. I due istogrammi a sinistra, relativi entrambi a $N=10$ misure indipendenti, sono notevolmente diversi. Al crescere del numero N di misure per istogramma (andando cioè da sinistra verso destra) gli istogrammi perdono progressivamente le caratteristiche aleatorie e tendono ad assumere una forma ben definita.

L'istogramma limite è evidentemente un'astrazione. La sua esistenza non può essere verificata (il numero N di misurazioni è comunque necessariamente finito). Postulare l'esistenza di un istogramma limite equivale, in ultima analisi, a postulare l'esistenza di una regolarità del mondo naturale che consente di estrarre leggi di carattere generale a partire da un numero limitato di osservazioni. Spesso (ma non sempre) l'istogramma di misure affette da errori casuali tende, al crescere di N , ad assumere una forma simmetrica "a campana" (Fig. 4.5, a destra). Anche l'istogramma limite avrà allora una forma a campana.

È utile cercare di descrivere questo andamento a campana dell'istogramma limite per mezzo di un modello matematico. Un modello matematico risulta però più agevole da trattare se espresso in termini di funzioni continue. Conviene pertanto fare un'ulteriore passaggio al limite, restringendo indefinitamente la larghezza delle colonne dell'istogramma: $\Delta x \rightarrow 0$. In questo modo l'istogramma limite viene sostituito da una *distribuzione limite*, esprimibile sotto forma di una funzione di variabile continua $f(X)$.

Osservazioni sperimentali e considerazioni teoriche hanno portato a concludere che il modello di funzione più adatto a descrivere l'andamento simmetrico a campana della distribuzione limite è dato dalla *distribuzione normale* o *distribuzione di Gauss*:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (4.3.13)$$

I due parametri m e σ dell'eq. (4.3.13) hanno le stesse dimensioni dei valori della variabile x . La funzione $f(x)$ che compare nell'eq. (4.3.13) è dimensionalmente omogenea alla densità campionaria f_j^* definita dall'eq. (4.3.4). La distribuzione gaussiana può pertanto essere considerata come il limite di un istogramma normalizzato in area (Fig. 4.5) non solo per $N \rightarrow \infty$ (numero di misurazioni tendente ad infinito) ma anche per $\mathcal{N} \rightarrow \infty$ (numero di colonne tendente ad infinito, cioè $\Delta x_j \rightarrow 0$).

È facile verificare che il parametro m individua la posizione della distribuzione sull'asse x , mentre σ dipende dalla larghezza della distribuzione (Fig. 4.6).

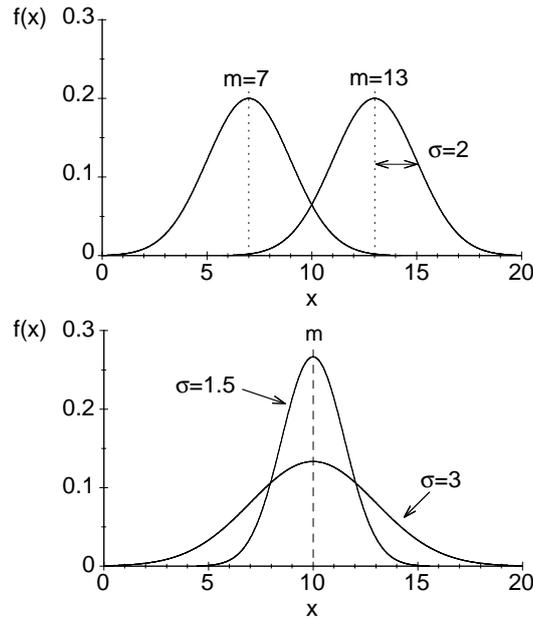


Figura 4.6: Distribuzione normale di Gauss, eq. (4.3.13). A sinistra due distribuzioni con uguale scarto quadratico medio σ e diversi valori medi m . A destra due distribuzioni con uguale valor medio m e diversi scarti quadratici medi σ .

I parametri m e σ rappresentano, rispettivamente, i valori asintotici per $N \rightarrow \infty$ del valor medio campionario m^* e dello scarto tipo campionario σ^* . Per convincersene, si può partire dalle espressioni della media e della varianza campionarie, m^* e D^* , Eq. (4.3.7) e (4.3.10), sostituendo la frequenza campionaria con la densità campionaria: $p^* = f^* \Delta x$. Il passaggio al limite per $N \rightarrow \infty$ si fa sostituendo le sommatorie con gli integrali:

$$m^* = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} x_j f_j^* \Delta x_j \quad m = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (4.3.14)$$

$$D^* = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} (x_j - m^*)^2 f_j^* \Delta x_j \quad D = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f(x) dx \quad (4.3.15)$$

Dalle varianze è immediato passare agli scarti tipo: $D^* = (\sigma^*)^2$ e $D = \sigma^2$. Chiameremo pertanto m “valor medio” della distribuzione limite, o semplicemente “media limite”, e σ “scarto quadratico medio” o “scarto tipo” (ingl. *standard deviation*) della distribuzione limite.

Il passaggio al limite dalla sommatoria (eq. 4.3.5) all'integrale consente di vedere che anche la distribuzione limite, come l'istogramma normalizzato in area, sottende un'area unitaria:

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} f_j^* \Delta X_j = 1 \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Le proprietà della distribuzione normale di Gauss verranno analizzate più dettagliatamente nel Cap. 6. Li dimostreremo che

- l'area compresa tra $m - \sigma$ e $m + \sigma$ è sempre 0.683 (68 % dell'area totale, (Fig. 4.7)
- l'area compresa tra $m - 2\sigma$ e $m + 2\sigma$ è sempre 0.954,
- l'area compresa tra $m - 3\sigma$ e $m + 3\sigma$ è sempre 0.997.

La distribuzione limite, essendo definita come limite di un istogramma sperimentale per $N \rightarrow \infty$, $\Delta x \rightarrow 0$, è evidentemente un'astrazione, come l'istogramma limite. La distribuzione limite non è

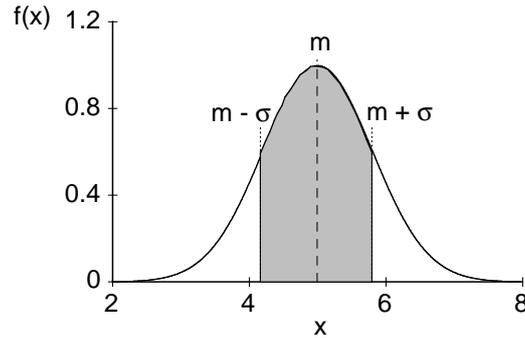


Figura 4.7: Esempio di distribuzione normale di Gauss con valor medio $m=5$ e scarto quadratico medio $\sigma=0.8$. L'area sottesa dalla curva tra $x = m - \sigma$ e $x = m + \sigma$ rappresenta sempre il 68 % dell'area totale, per qualsiasi valore di m e σ .

pertanto direttamente conoscibile. Potrà solo essere approssimata, con precisione tanto maggiore quanto più grande è il numero N di misurazioni effettuate. Inoltre, è evidente che il modello gaussiano non può comunque interpretare i dati sperimentali in modo esatto, almeno per quanto riguarda le code della distribuzione: la funzione rappresentata dall'eq. (4.3.13) infatti non si annulla per nessun valore della variabile x .

Nonostante queste limitazioni, ipotizzare l'esistenza della distribuzione limite rappresenta, come vedremo, uno strumento estremamente utile per stabilire criteri di valutazione quantitativa dei risultati di un insieme finito di misurazioni.

Ogni insieme di N misure può venire considerato come un **campione** (ingl. *sample*), necessariamente finito, della distribuzione limite, caratterizzato da un valor medio campionario m^* e da una varianza campionaria D^* .

Non è ovviamente possibile *determinare con esattezza* i parametri di una distribuzione limite a partire da un suo campionamento finito. Comunque grande sia il numero N di misure, infatti, i parametri statistici m^* e D^* hanno sempre un carattere aleatorio. È però plausibile cercare di **stimare** i parametri m e $D = \sigma^2$ della distribuzione limite a partire dai parametri statistici m^* e D^* di un campionamento costituito da N misure. Affronteremo in modo approfondito al Cap. 7 il problema della stima dei parametri di una distribuzione limite a partire da un suo campionamento finito. Qui ci limitiamo ad anticipare i risultati più importanti.

Supponiamo di avere effettuato N misurazioni di una grandezza fisica e di avere ottenuto N valori x_i .

- a) La migliore *stima* del valor medio m della distribuzione limite, che indicheremo con \tilde{m} , è il valor medio campionario m^* :

$$\tilde{m} = m^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (4.3.16)$$

- b) La migliore *stima* della varianza $D = \sigma^2$ della distribuzione limite, che indicheremo con \tilde{D} , non è la varianza campionaria D^* , bensì:

$$\tilde{D} = \frac{N}{N-1} D^* = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*)^2. \quad (4.3.17)$$

Evidentemente $D^* < \tilde{D}$; la differenza è però tanto più piccola quanto più grande è N .

La varianza campionaria D^* sottostima la varianza limite D perché è basata sugli scarti rispetto alla media campionaria m^* anziché sugli scarti rispetto alla media limite m .

A partire dall'eq. (4.3.17) si può anche considerare la migliore stima $\tilde{\sigma}$ dello scarto quadratico medio limite:

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{N}{N-1}} \sigma^* = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*)^2}. \quad (4.3.18)$$

Il valore $\tilde{\sigma}$ dell'Eq. (4.3.18) è detto **scarto tipo stimato** o *scarto tipo sperimentale* (ingl. *experimental standard deviation*).

Esempio 1: Per avere un'idea intuitiva della differenza tra σ^* e $\tilde{\sigma}$, costruiamo tre insiemi costituiti, rispettivamente, da $N = 6, 4$ e 2 valori x_i , con uguali valor medio m^* e scarto tipo σ^* . È facile verificare che lo scarto tipo stimato $\tilde{\sigma}$, calcolato mediante l'eq. (4.3.18), cresce al diminuire di N , allontanandosi dal valore $\sigma^*=1$.

N	x_i	m^*	σ^*	$\tilde{\sigma}$
6	4,4,4,6,6,6	5	1	1.095
4	4,4,6,6	5	1	1.155
2	4,6	5	1	1.410

Esempio 2: Se si esegue una sola misurazione, cioè se $N=1$, si ottiene un solo valore x_1 . In tal caso $m^* = x_1$ e $\sigma^* = 0$: lo scarto tipo campionario è nullo. L'eq. (4.3.18) mostra che per $N=1$ lo scarto tipo stimato $\tilde{\sigma}$ è indeterminato. Ciò corrisponde al fatto che con una sola misura non è possibile alcuna stima della dispersione della distribuzione limite.

4.3.5 Distribuzione dei valori medi

La distribuzione limite introdotta nel precedente § 4.3.4 descrive la dispersione dei valori delle singole misure di una grandezza X a seguito delle fluttuazioni dovute agli errori casuali.

Consideriamo ora M distinti campionamenti, ciascuno costituito da N misurazioni. I valori medi campionari m^* per ciascuno degli M campionamenti

$$m_1^*, m_2^*, m_3^*, \dots, m_M^*$$

possono essere raggruppati in un istogramma (istogramma dei valori medi campionari).

Al crescere del numero M di campionamenti l'istogramma dei valori medi campionari tende ad assumere una forma sempre più regolare. Per $M \rightarrow \infty$ potremo parlare di un istogramma limite dei valori medi campionari e quindi, passando al continuo, di una *distribuzione limite $g(m^*)$ dei valori medi campionari*.

È ragionevole aspettarsi che la distribuzione limite $g(m^*)$ delle medie campionarie sia più stretta della distribuzione limite $f(x)$ dei singoli valori di misura. Di più, ci aspettiamo che la distribuzione delle medie campionarie sia tanto più stretta quanto più grande è il numero N di misurazioni su cui si basa il calcolo di ogni singola media campionaria (Fig. 4.8).

Nel Capitolo 6 dimostreremo che

- qualunque sia la forma della distribuzione limite $f(x)$ dei valori di misura singola (quindi anche non gaussiana), la distribuzione $g(m^*)$ delle medie campionarie può comunque essere assunta gaussiana se il numero N di misure che concorrono a formare la singola media m^* è sufficientemente grande.

Nel Capitolo 7 dimostreremo inoltre che:

- il *valor medio* $\mathbf{m}[m^*]$ della distribuzione limite delle medie campionarie coincide con il valor medio m della distribuzione limite delle singole misure:

$$\mathbf{m}[m^*] = m; \quad (4.3.19)$$

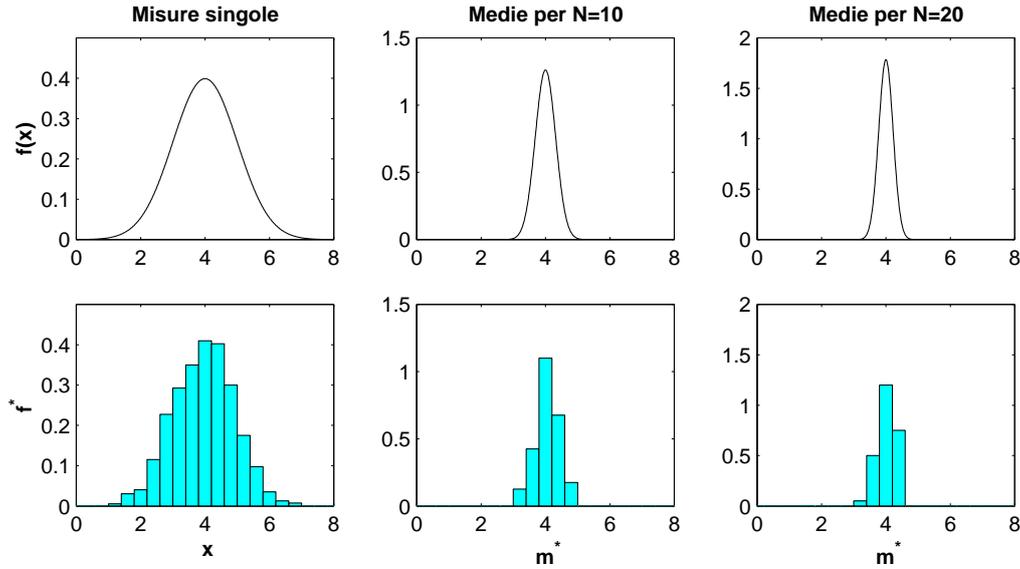


Figura 4.8: In alto a sinistra: distribuzione limite gaussiana di valori di misura singola, con $m=4$ e $\sigma=1$ (in unità di misura arbitrarie). Sempre in alto, al centro e a destra sono mostrate le corrispondenti distribuzioni limite delle medie campionarie m^* , basate rispettivamente su $N=10$ e $N=20$ misure. In basso a sinistra: un campionamento sperimentale costituito da $N=1000$ misure singole x . Sempre in basso, al centro e a destra: campionamenti rispettivamente di $M=100$ valori medi m^* basati su $N=10$ misure e $M=50$ valori medi m^* basati su $N=20$ misure.

- c) la *varianza* $\mathbf{D}[m^*]$ e lo *scarto quadratico medio* $\sigma[m^*]$ della distribuzione limite delle medie campionarie sono legati rispettivamente alla varianza D e allo scarto quadratico medio σ della distribuzione limite delle singole misure dalle relazioni:

$$\mathbf{D}[m^*] = \frac{1}{N} D; \quad \sigma[m^*] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sigma, \quad (4.3.20)$$

dove N è il numero di misurazioni per ogni campionamento.

4.3.6 Incertezza dovuta agli errori casuali

Siamo ora finalmente in grado di risolvere il problema che ci eravamo posti all'inizio del § 4.3: stabilire le modalità per esprimere nella forma $X_0 \pm \delta X$ il risultato di N misurazioni ripetute affette da errori casuali.

Se la distribuzione limite $f(x)$ delle singole misure fosse perfettamente nota, potremmo assumere come *valore vero* della grandezza fisica misurata il valor medio della distribuzione limite: $X_0 = m$. L'incertezza dovuta agli errori casuali sarebbe perciò nulla, $\delta X_{\text{cas}} = 0$.

Nella realtà, la distribuzione limite non è mai nota. Se ne può al più postulare l'esistenza, e considerare le N misurazioni effettuate come un suo campionamento limitato.

Come abbiamo visto sopra, la media campionaria m^* delle N misure rappresenta comunque la migliore stima del valor medio m della distribuzione limite. È perciò ragionevole assumere come **valore centrale** X_0 della misura la media campionaria m^* :

$$X_0 = m^*. \quad (4.3.21)$$

D'altra parte, la media campionaria m^* è una variabile aleatoria, il cui valore cambierebbe in modo casuale se ripetessimo il campionamento. L'**incertezza** δX_{cas} della misura dipende dall'aleatorietà della media campionaria m^* . È naturale pertanto collegare l'incertezza della misura alla larghezza della distribuzione limite delle medie campionarie.

Nel caso dell'incertezza dovuta alla risoluzione, considerato al § 4.2, abbiamo avuto a che fare con una distribuzione a rettangolo, definita da due valori minimo e massimo della grandezza X . È stato quindi possibile introdurre un'incertezza massima $\delta X_{\text{ris}} = \Delta X/2$.

Al contrario, la distribuzione limite delle medie campionarie è con buona approssimazione gaussiana, e non è limitata tra due valori massimo e minimo della variabile m^* . Non è pertanto possibile definire un'incertezza massima. La larghezza della distribuzione delle medie campionarie può essere espressa in termini di scarto tipo $\sigma[m^*]$, per cui, nel caso degli errori casuali, si può definire solo un'incertezza tipo (*standard uncertainty*):

$$\delta X_{\text{cas}} \propto \sigma[m^*]. \quad (4.3.22)$$

Per convenzione si assume l'incertezza tipo δX_{cas} dovuta agli errori casuali proprio uguale allo scarto tipo $\sigma[m^*]$,

$$\delta X_{\text{cas}} = \sigma[m^*]. \quad (4.3.23)$$

4.3.7 Valutazione sperimentale dell'incertezza

Vediamo ora come è possibile, nella pratica, valutare l'incertezza dovuta agli errori casuali a partire da un insieme finito di misure, cioè da un campionamento finito della distribuzione limite.

La procedura da seguire si basa sulla seguente sequenza logica.

- a) L'incertezza dovuta agli errori casuali è, per convenzione, data dallo scarto tipo della distribuzione delle medie campionarie: $\delta X_{\text{cas}} = \sigma[m^*]$.
- b) Lo scarto tipo della distribuzione delle medie campionarie, $\sigma[m^*]$, è legato allo scarto tipo σ della distribuzione limite delle singole misure dalla relazione $\sigma[m^*] = \sigma/\sqrt{N}$ (eq. 4.3.20).
- c) Lo scarto tipo σ della distribuzione limite delle singole misure non è calcolabile con esattezza a partire da un numero finito di misurazioni; può però essere *stimato* mediante l'eq. (4.3.18).

Combinando insieme questi tre passi, avremo in definitiva:

$$\delta X_{\text{cas}} = \tilde{\sigma}[m^*] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sigma = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N}{N-1}} \sigma^* = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*)^2}. \quad (4.3.24)$$

L'ultima uguaglianza nell'eq. (4.3.24) dà la formula pratica per stimare l'incertezza dovuta agli errori casuali a partire da un insieme di misure ripetute.

Il valore $\tilde{\sigma}[m^*]$ calcolato mediante l'eq. (4.3.24) è chiamato **scarto tipo stimato della media** (in inglese, *experimental standard deviation of the mean*).

È evidente che per valutare δX_{cas} è necessario avere a disposizione almeno due misure ($N > 1$).

Cerchiamo ora di approfondire il significato dell'eq. (4.3.23). Che cosa significa che l'incertezza dovuta agli errori casuali è convenzionalmente misurata dallo scarto tipo della distribuzione delle medie?

Abbiamo visto in precedenza, quando abbiamo introdotto la distribuzione normale di Gauss, che l'area sottesa dalla curva della funzione gaussiana tra i valori $m - \sigma$ e $m + \sigma$ è pari a 0.68. Pertanto, nell'ipotesi astratta di conoscere *a priori* la distribuzione gaussiana delle medie campionarie, centrata in m e con scarto tipo $\sigma[m^*]$, potremmo dire che la media m^* di un qualsiasi campionamento ha la probabilità del 68 % di cadere nell'intervallo $m^* \pm \sigma[m^*]$.

Consideriamo ora invece un caso concreto, in cui si conoscono i valori campionari m^* e σ^* , e si cerca di risalire alla migliore stima del valor vero m . Possiamo ancora dire che c'è la probabilità del 68 % che il valor vero m si trovi nell'intervallo $m^* \pm \delta X_{\text{cas}}$, con δX_{cas} stimato mediante l'eq. (4.3.24)?

Se il campionamento è consistente (N grande), la risposta è, con buona approssimazione, sì. Si tratta però solo di un'approssimazione, dovuta al fatto che lo scarto tipo della distribuzione delle medie non è noto esattamente (eq. 4.3.23), bensì solo stimato a partire dai dati sperimentali (eq. 4.3.24). La conseguenza di questo fatto può essere rilevante per campionamenti di limitate

dimensioni (N piccolo): la probabilità che m si trovi nell'intervallo $m^* \pm \delta X$ è infatti del 68 % solo al limite per $N \rightarrow \infty$; per valori di N piccoli la probabilità può essere significativamente inferiore al 68 %.

Ritorniamo in modo più approfondito su questo problema ai § 7.3 e 7.4. Per il momento, ci limitiamo a ricordare che è sempre buona norma, nell'esprimere l'incertezza dovuta agli errori casuali, indicare il numero N di misurazioni effettuate.

Nota: In questo § 4.3 abbiamo adottato la seguente convenzione di nomenclatura, che sarà mantenuta anche in seguito: con m, D, σ sono indicati i parametri relativi a distribuzioni limite, con m^*, D^*, σ^* i parametri relativi a campionamenti, con $\tilde{m}, \tilde{D}, \tilde{\sigma}$ eventuali stime dei parametri.

4.4 Errori sistematici

Nel § 3.4, analizzando le prestazioni degli strumenti di misura, abbiamo preso in considerazione gli *errori sistematici*, cioè gli errori che si manifestano in modo regolare con la stessa entità ogni volta che la misura viene ripetuta.

Esempio: Si misura il periodo di oscillazione di un pendolo con un cronometro che ritarda. Tutte le misure, comunque ripetute, sono errate per difetto (errore sistematico dovuto alla taratura difettosa dello strumento).

Le caratteristiche dello strumento di misura non sono le uniche possibili cause di errore sistematico. Anche le modalità con cui lo strumento viene utilizzato possono contribuire ad introdurre errori sistematici (si riveda l'analisi fatta al § 4.1 sull'origine dell'incertezza).

Esempio: Si misura il periodo di oscillazione di un pendolo con un cronometro azionato manualmente. Il valore della misura dipende anche dalla differenza tra i tempi di reazione dello sperimentatore all'avvio e all'arresto del cronometro. La differenza tra i tempi di reazione può avere sia una componente casuale sia una componente sistematica; la componente casuale dà origine alla dispersione dei valori di misura; la componente sistematica dà origine ad una variazione fissa del valore di misura.

La varietà delle situazioni da cui possono avere origine gli errori sistematici rende pressoché impossibile una trattazione formale esauriente. La ricerca e l'eliminazione o compensazione degli errori sistematici è un aspetto particolarmente difficile e delicato della fisica sperimentale. Nel seguito di questo paragrafo esamineremo e commenteremo alcuni casi particolarmente rilevanti, senza alcuna pretesa di esaurire l'argomento.

4.4.1 Misurazioni ripetute in condizioni fisse.

Supponiamo di ripetere più volte la misurazione di una grandezza fisica sempre nelle stesse condizioni, cioè mantenendo invariati l'osservatore, la procedura, lo strumento ed eseguendo tutte le misurazioni nello stesso sito ed entro un intervallo di tempo limitato. Ogni misura è in genere affetta sia da errori *casuali* sia da errori *sistematici*.

Come abbiamo visto al § 4.3, gli *errori casuali* non possono venire del tutto eliminati, ma è sempre possibile, ripetendo più volte la misurazione, stimarne l'entità ed esprimerla sotto forma di un'incertezza δX_{cas} .

Gli *errori sistematici*, invece, non vengono comunque messi in luce da misurazioni ripetute nelle stesse condizioni sperimentali; essi possono venire individuati solo mediante un'analisi accurata delle prestazioni dello strumento e della metodologia della misurazione. Proviamo a chiarire le idee con alcuni esempi significativi.

1

Talora l'analisi metodologica può portare a individuare un errore sistematico dovuto alla procedura di misura. In tal caso, l'errore può venire eliminato modificando opportunamente la metodologia di misura, oppure compensato da un'opportuna correzione alla misura. L'eventuale correzione può

essere comunque affetta da un'incertezza δX_{sis} , che contribuirà all'incertezza globale della misura (§ 4.5.4).

Esempio: Si misura l'accelerazione di gravità g sfruttando la relazione $\mathcal{T} = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ che lega il periodo di oscillazione \mathcal{T} e la lunghezza ℓ di un pendolo semplice nell'approssimazione delle piccole oscillazioni. Il pendolo a disposizione è un cilindretto metallico appeso ad un punto fisso mediante un filo: si misurano direttamente lunghezza ℓ e periodo \mathcal{T} e quindi si calcola $g = (2\pi/\mathcal{T})^2\ell$. Un'analisi più accurata mostra che il periodo dipende anche dall'ampiezza di oscillazione e dalla distribuzione della massa del cilindretto. La relazione di partenza $\mathcal{T} = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ è approssimata, quindi crea un errore sistematico nella misura di g ; una relazione più accurata, seppure ancora approssimata, è la seguente: $\mathcal{T} = 2\pi\sqrt{I/mg\ell}[1 + (1/4)\sin^2(\theta_0/2)]$, dove I è il momento d'inerzia del cilindretto rispetto all'asse di oscillazione e θ_0 l'ampiezza di oscillazione.

2

In altri casi, l'analisi della procedura di misurazione porta ad individuare le maggiori cause di errore sistematico senza però consentire di calcolarne e correggerne gli effetti con esattezza. In tali casi si cerca di stimare l'entità dei possibili errori sistematici e di esprimerla ancora sotto forma di un'incertezza δX_{sis} , che contribuirà all'incertezza globale della misura (§ 4.5.4).

Esempio: Si vuole misurare l'intensità di corrente I che scorre in un ramo di un circuito elettrico. Allo scopo si inserisce in serie nel ramo del circuito un amperometro a bobina mobile. Lo strumento di misura ha una resistenza interna R_i non nulla ed introduce una perturbazione nel regime di funzionamento del circuito. L'intensità di corrente misurata dallo strumento è $I_m < I$. La differenza $I_m - I$ rappresenta un *errore sistematico* della misura. In linea di principio, se la resistenza interna R_i dello strumento e le caratteristiche del circuito sono note, l'errore sistematico può essere valutato e corretto. Nella pratica, le caratteristiche del circuito non sono in genere note con sufficiente dettaglio; è però possibile stimare almeno l'entità massima dell'errore sistematico.

3

Può anche succedere che l'errore sistematico sia riferibile ad una insufficiente definizione della grandezza da misurare.

Esempio: Si vuole misurare la dipendenza del periodo di oscillazione \mathcal{T} di un pendolo dall'ampiezza θ_0 . Allo scopo, si misurano coppie di valori (θ_0, \mathcal{T}) per diversi valori di θ_0 . È ben noto, tuttavia, che l'ampiezza θ_0 si riduce progressivamente nel tempo, per effetto principalmente della resistenza dell'aria. Per grandi valori di θ_0 la riduzione può essere non trascurabile anche durante l'intervallo di tempo corrispondente ad un periodo \mathcal{T} . Non è perciò ben definito cosa si intenda per ampiezza relativa ad una data oscillazione. Possiamo affrontare questa situazione considerando la misura effettiva di ampiezza come se fosse affetta da un errore sistematico dovuto allo smorzamento, ed attribuirle una opportuna incertezza. L'incertezza può essere stimata valutando l'entità della riduzione di θ_0 durante un'oscillazione.

4.4.2 Misurazioni ripetute in condizioni diverse: discrepanza

La ricerca degli errori sistematici e la loro eliminazione, o quantomeno la stima della loro entità, possono essere facilitate dal confronto tra misurazioni effettuate in condizioni diverse (diversi osservatori, diverse procedure, diversi strumenti, diversi siti, etc.) Per semplicità ci limiteremo

inizialmente al confronto di due sole misurazioni eseguite in condizioni diverse, che chiameremo A e B .

Esempio: Due operatori, A e B , misurano il periodo di oscillazione di un pendolo con un cronometro azionato manualmente. La componente sistematica dei tempi di reazione può essere diversa per i due operatori.

Esempio: La costante elastica K di una molla viene misurata in due modi. La procedura A (statica) consiste nel misurare il rapporto tra forza applicata F e deformazione x , sfruttando la relazione: $F = Kx$. La procedura B (dinamica) consiste nel collegare alla molla una massa e misurare la relazione tra massa m e periodo di oscillazione \mathcal{T} , sfruttando la relazione $\mathcal{T} = 2\pi\sqrt{m/K}$. Si noti che in questo esempio le due procedure si riferiscono entrambe ad una misurazione *indiretta* della costante elastica K ; la valutazione dell'incertezza nelle misure indirette verrà affrontata al §4.6.

I risultati delle misurazioni effettuate utilizzando le due procedure saranno espressi nella forma

$$X_A \pm \delta X_A; \quad X_B \pm \delta X_B, \quad (4.4.1)$$

dove le incertezze δX_A e δX_B dipenderanno, a seconda dei casi, dalla risoluzione di misura (§ 4.2) o dalla dispersione dovuta agli errori casuali (§ 4.3), e potranno anche contenere contributi dovuti ad errori sistematici già riconosciuti.

Un caso frequente, soprattutto nella pratica dei laboratori didattici, è quello in cui una delle due incertezze è molto maggiore dell'altra, $\delta X_A \gg \delta X_B$; ciò accade ad esempio se X_A è misurata con semplice strumentazione didattica mentre X_B è un valore di riferimento, quotato in pubblicazioni specializzate. In tal caso si potrà porre $\delta X_B=0$, e le considerazioni seguenti risulteranno semplificate.

Chiamiamo **discrepanza** il valore assoluto della differenza tra le due misure: $|X_A - X_B|$.

Si può pensare che la discrepanza sia dovuta all'influenza di errori sistematici in almeno una delle due misurazioni. In realtà, prima di trarre delle conclusioni in tal senso, è necessario confrontare la discrepanza con le incertezze delle due misure. Una trattazione esaustiva dell'argomento è pressoché impossibile, in considerazione della varietà di situazioni che si possono incontrare. Proviamo allora a chiarire le idee con alcuni esempi significativi.

- 1) Le incertezze su X_A e X_B sono entrambe dovute alla risoluzione di misura, e quindi descritte da distribuzioni a rettangolo, di larghezze rispettivamente ΔX_A e ΔX_B . Se la discrepanza è confrontabile o inferiore alla somma delle *incertezze massime*, cioè alla semisomma delle risoluzioni, (Fig. 4.9, in alto a sinistra),

$$|X_A - X_B| \leq \frac{\Delta X_A + \Delta X_B}{2} \quad (4.4.2)$$

i due valori X_A e X_B si considerano **consistenti** (o *compatibili*). La discrepanza $|X_B - X_A|$ può essere attribuita alle incertezze dei singoli valori, e non ci può essere di alcun aiuto per valutare ulteriori contributi all'incertezza dovuti agli errori sistematici.

- 2) Le incertezze su X_A e X_B sono ancora entrambe dovute alla risoluzione di misura, ma questa volta la discrepanza è maggiore della somma delle *incertezze massime*, cioè della semisomma delle risoluzioni (Fig. 4.9, in alto a destra),

$$|X_A - X_B| > \frac{\Delta X_A + \Delta X_B}{2}. \quad (4.4.3)$$

I due valori X_A e X_B si considerano **inconsistenti** (o *incompatibili*), e la discrepanza può generalmente essere attribuita all'effetto di errori sistematici in almeno una delle due procedure di misurazione.

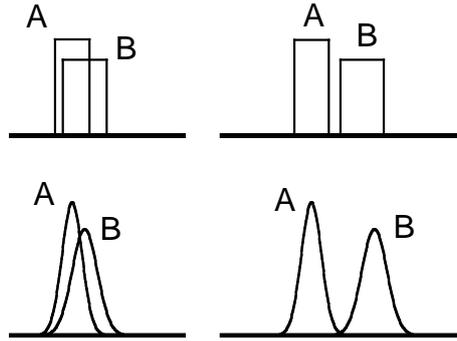


Figura 4.9: Rappresentazione schematica del confronto tra misure di una grandezza X ottenute con due procedure diverse, A e B . In alto le incertezze sono dovute alla risoluzione (distribuzioni a rettangolo), in basso sono dovute agli errori casuali (distribuzioni normali). A sinistra sono mostrati casi di consistenza, a destra casi di inconsistenza.

- 3) Le incertezze su X_A e X_B sono entrambe dovute agli errori casuali, e quindi descritte da distribuzioni gaussiane. Non esiste in questo caso un'incertezza massima. Ricordiamo però che la probabilità di trovare valori al di fuori dell'intervallo $\pm 3\sigma$ centrato sul valor medio è trascurabile. Pertanto, se la discrepanza è maggiore della somma dei due intervalli "3 σ " (Fig. 4.9, in basso a destra),

$$|X_A - X_B| > 3\sigma_A + 3\sigma_B \quad (4.4.4)$$

potremo ancora considerare le misure X_A e X_B come **inconsistenti** (o *incompatibili*), e attribuire la discrepanza all'effetto di errori sistematici in almeno una delle due procedure di misurazione.

- 4) Le incertezze su X_A e X_B sono ancora entrambe dovute agli errori casuali, ma questa volta la discrepanza è inferiore della somma dei due intervalli "3 σ " (Fig. 4.9, in basso a sinistra),

$$|X_A - X_B| < 3\sigma_A + 3\sigma_B. \quad (4.4.5)$$

In questo caso, una decisione sulla consistenza dei due valori X_A e X_B è meno immediata che nel caso delle distribuzioni a rettangolo. A rigore, si possono fare solo considerazioni di natura probabilistica, basate sul confronto tra discrepanza e larghezze delle gaussiane (approfondiremo l'argomento più avanti, al § 7.4). La decisione dipende in buona misura dalla valutazione soggettiva dello sperimentatore.

Nel caso di misure inconsistenti, prima di trarre conclusioni definitive circa l'incertezza, è buona norma, se possibile, riesaminare con cura entrambe le procedure A e B , per cercare di individuare ed eventualmente eliminare gli errori sistematici. Allo scopo, sempre se possibile, si ricorre ad ulteriori misurazioni di riscontro basate su procedure alternative o affidate a operatori diversi.

Esempio: Riprendiamo ancora l'esempio della misurazione della costante elastica di una molla.

Un'eventuale inconsistenza tra i risultati delle due procedure di misurazione, statica e dinamica, può portare a riconsiderare la procedura della misurazione dinamica. Nella relazione $\mathcal{T} = 2\pi\sqrt{m/K}$, la massa m misura l'inerzia del corpo collegato alla molla, ma non tiene conto dell'inerzia della molla stessa. Una relazione più corretta è $\mathcal{T} = 2\pi\sqrt{M/K}$, con $M = m + m_e$, dove m_e è una *massa efficace* che tiene conto dell'inerzia della molla.

4.4.3 Media pesata

Prima di considerare più in dettaglio la trattazione degli errori sistematici nel caso di misure inconsistenti, vogliamo introdurre una procedura, la cosiddetta *media pesata*, che consente di sintetizzare comunque in un unico valore X_0 i risultati di due o più misurazioni ripetute in condizioni diverse.

Per semplicità di notazione, ci limitiamo inizialmente al caso di due sole misure

$$X_A \pm \delta X_A; \quad X_B \pm \delta X_B, \quad (4.4.6)$$

Nel calcolo del valor medio X_0 è ragionevole tener conto dell'eventuale differenza tra le incertezze δX_A e δX_B : la misura che ha l'incertezza più bassa dovrà contribuire in modo più significativo alla media, e viceversa. Allo scopo, si introducono i *pesi* dei valori X_A e X_B , definiti come

$$w_A = \frac{1}{(\delta X_A)^2}; \quad w_B = \frac{1}{(\delta X_B)^2}. \quad (4.4.7)$$

Il valore $X_0 \pm \delta X$ viene quindi calcolato mediante la procedura della *media pesata*:

$$X_0 = X_w = \frac{X_A w_A + X_B w_B}{w_A + w_B}. \quad (4.4.8)$$

Una giustificazione formale della procedura della media pesata, ed in particolare della scelta dei pesi secondo l'eq. (4.4.7), verrà data al § 7.3.3 in base a considerazioni di tipo probabilistico.

Come vedremo al Cap. 7, la media pesata secondo l'eq. (4.4.8) è a rigore ben fondata solo nel caso in cui l'incertezza sia esprimibile come scarto tipo di una distribuzione normale di Gauss (caso degli errori casuali). Nel caso di altri tipi di distribuzione (ad esempio la distribuzione a rettangolo che descrive la risoluzione di misura) la procedura di media pesata dell'eq. (4.4.8) è ancora utilizzabile, seppure in modo meno rigoroso, purché l'incertezza sia espressa dallo scarto tipo della distribuzione.

Vogliamo ora determinare l'incertezza δX_w sul valore della media pesata. Se i due valori X_A e X_B sono *consistenti*, l'incertezza sulla media pesata è interamente riconducibile alle loro incertezze, e può essere espressa così:

$$\delta X_w = \frac{1}{\sqrt{w_A + w_B}}. \quad (4.4.9)$$

L'espressione dell'incertezza sulla media pesata contenuta nell'Eq. (4.4.9) verrà giustificata al § 4.6.2 come applicazione particolare delle regole generali per la propagazione dell'incertezza.

Esempio: La costante elastica K di una molla viene misurata sia staticamente che dinamicamente (vedi esempio precedente). I corrispondenti risultati sono: $K_A = 10.40 \pm 0.04 \text{ kg/s}^2$ e $K_B = 10.37 \pm 0.08 \text{ kg/s}^2$. I pesi dei due risultati sono rispettivamente: $w_A = 625 \text{ s}^4/\text{kg}^2$, $w_B = 156 \text{ s}^4/\text{kg}^2$. La media pesata è $K = 10.39 \pm 0.03 \text{ kg/s}^2$.

La procedura di media pesata può essere generalizzata ad un numero qualsiasi di misure:

$$X_w = \frac{\sum_i X_i w_i}{\sum_i w_i}, \quad \text{con} \quad w_i = \frac{1}{(\delta X_i)^2}, \quad (4.4.10)$$

e l'incertezza, per misure tra di loro consistenti, è espressa da:

$$\delta X_w = \frac{1}{\sqrt{\sum_i w_i}}. \quad (4.4.11)$$

4.4.4 Incertezza dovuta agli errori sistematici

Torniamo a fissare l'attenzione sul caso in cui le due misure X_A e X_B dell'eq. (4.4.1) sono **inconsistenti**, a causa della presenza di rilevanti errori sistematici in almeno una delle due procedure di misurazione.

Un *valore medio* delle due misure potrà sempre essere calcolato mediante la procedura di media pesata, eq. (4.4.8), che attribuisce maggior peso alla misura con minore incertezza.

La discrepanza tra le due misure sarà considerata sotto forma di incertezza. L'*incertezza standard* dovuta agli errori sistematici potrà in questo caso essere espressa mediante la stessa procedura usata

per gli errori casuali, eq. (4.3.24), cioè come lo scarto quadratico medio stimato della distribuzione delle medie. Per due misure X_A e X_B pertanto è facile verificare, applicando l'eq. (4.3.24), che

$$\delta X_{\text{sis}} \simeq \frac{|X_A - X_B|}{2} \quad (4.4.12)$$

Questa procedura può essere generalizzata ad un numero qualsiasi di misure inconsistenti

$$X_A, X_B, X_C, \dots$$

ottenute in condizioni diverse. La *distribuzione* dei valori X_A, X_B, X_C, \dots è dovuta alla differente influenza degli errori sistematici in ogni singolo esperimento.

Il valore medio X_0 potrà essere ancora calcolato mediante la formula della media pesata, eq. (4.4.10). L'incertezza sulla media pesata δX_w , calcolata con l'eq. (4.4.11), può tener conto solo delle incertezze nelle singole misure X_A, X_B, X_C, \dots di partenza. L'incertezza δX_{sis} dovuta agli errori sistematici potrà invece essere valutata in analogia con l'eq. (4.4.12) a partire dalla distribuzione dei valori, utilizzando la formula (4.3.24), già introdotta per gli errori casuali.

In altri termini, in questo caso gli errori sistematici incogniti delle singole misurazioni vengono trattati formalmente come errori casuali. Si può anche pensare che, per un insieme grande di misurazioni effettuate in condizioni differenti, gli errori sistematici delle singole misure possano essere visti nel complesso come errori casuali (questa prospettiva è detta talora in inglese *randomization of systematic errors*.)

Esempio: In un laboratorio didattico N gruppi di lavoro determinano indipendentemente l'accelerazione di gravità g misurando periodo \mathcal{T} e lunghezza ℓ di un pendolo e usando la relazione $\mathcal{T} = 2\pi\sqrt{\ell/g}$. Indichiamo con $g_k \pm \delta g_k$ il risultato del k -mo gruppo ($k = 1, 2, \dots, N$). Se i risultati dei diversi gruppi sono tra loro inconsistenti, le discrepanze vanno attribuite agli errori sistematici. La natura e l'entità dell'errore sistematico di un singolo gruppo è incognita. Tuttavia, se il numero di gruppi N è sufficientemente grande, si trova che la distribuzione dei valori tende ad assomigliare ad una distribuzione di tipo casuale. L'errore sistematico medio può essere stimato come scarto tipo della distribuzione delle medie dei valori g_k .

Nota: La consistenza o inconsistenza di due o più misure ottenute in condizioni diverse può essere valutata a posteriori confrontando l'incertezza sulla media pesata, δX_w , con l'incertezza calcolata a partire dalla dispersione dei valori; se quest'ultima prevale, significa che le misure non sono consistenti, a causa dell'influenza di errori sistematici (oppure per la sottovalutazione delle incertezze sulle singole misure).

4.5 Incertezza: riepilogo e confronti

Nei paragrafi precedenti abbiamo distinto ed esaminato separatamente tre diverse possibili cause di incertezza nelle misure delle grandezze fisiche:

- la risoluzione della misura (§ 4.2);
- la dispersione dei valori di misura dovuta agli errori casuali (§ 4.3);
- la stima degli errori sistematici (§ 4.4).

Quando si usano strumenti di misura, gli effetti degli errori sistematici e casuali sono spesso valutati dal costruttore, per cui si potrà avere a che fare anche con

- l'incertezza quotata nel manuale d'uso dello strumento (§ 3.4).

Come abbiamo più volte rilevato, l'*incertezza fa parte integrante della misura*, e deve sempre essere espressa esplicitamente, ad esempio nella forma $X_0 \pm \delta X$.

Nei casi esaminati nei precedenti paragrafi l'incertezza δX è stata definita in modo convenzionale. Ad esempio, nel caso degli errori casuali l'incertezza è stata assunta uguale allo scarto tipo della distribuzione delle medie, $\delta X = \sigma[m^*]$. Sarebbe stato altrettanto lecito assumere, come pure talora viene fatto, $\delta X = 2\sigma[m^*]$ oppure $\delta X = 3\sigma[m^*]$. Il significato stesso di incertezza può

variare da caso a caso. Ad esempio, per gli errori casuali l'incertezza è legata allo scarto tipo di una distribuzione normale, per la risoluzione è legata alla larghezza di una distribuzione a rettangolo. In questo secondo caso, è stato possibile distinguere tra un'incertezza massima ($\Delta X/2$) ed un'incertezza tipo ($\Delta X/\sqrt{12}$).

La mancanza di uniformità nella valutazione ed espressione dell'incertezza può creare difficoltà non trascurabili, tipicamente nelle seguenti situazioni:

- a) l'incertezza di una misura è dovuta all'effetto composto di cause differenti (ad es. errori casuali ed errori sistematici);
- b) si deve esprimere l'incertezza δQ di una grandezza $Q(X, Y, \dots)$ misurata indirettamente a partire dalle incertezze $\delta X, \delta Y, \dots$, generalmente di diversa origine, delle grandezze X, Y, \dots misurate direttamente;
- c) si vogliono confrontare misure di una stessa grandezza provenienti da laboratori diversi, che hanno utilizzato differenti convenzioni per quotare le incertezze.

A seguito di un'iniziativa del B.I.P.M. (*Bureau International des Poids et Mesures*), nel 1995 l'I.S.O. (*International Organisation for Standardisation*) ha redatto una *Guida per l'espressione dell'incertezza di misura*, che stabilisce regole generali per uniformare a livello internazionale i metodi di valutazione ed espressione dell'incertezza. La versione italiana della guida è stata realizzata nel 1997 dall'U.N.I. (*Ente Nazionale per l'Unificazione*)

In questo paragrafo confronteremo i diversi tipi di incertezza introdotti nei paragrafi precedenti e vedremo come è possibile impostare una descrizione unificata in base alle raccomandazioni dell'I.S.O.

4.5.1 Incertezza statistica e non

Secondo l'impostazione dell'I.S.O., le incertezze vengono classificate in relazione al modo con cui vengono calcolate, anziché in relazione alle loro cause. Vengono pertanto distinte due Categorie di incertezze:

Categoria A (ingl. *Type A*): incertezze valutate per mezzo di metodi statistici.

Categoria B (ingl. *Type B*): incertezze valutate per mezzo di metodi non statistici.

Esempio 1: L'incertezza δX_{cas} dovuta agli *errori casuali* è di Categoria A, in quanto la sua valutazione si basa sul trattamento statistico di un insieme di N misurazioni ripetute. L'incertezza δX_{cas} è misurata a partire dalla larghezza della distribuzione delle medie campionarie; la distribuzione ha forma normale e la sua larghezza si riduce al crescere del numero N di misurazioni.

Esempio 2: L'incertezza δX_{ris} dovuta alla *risoluzione* è di Categoria B, in quanto la sua valutazione non fa riferimento a metodi statistici basati sulla ripetizione delle misurazioni. L'incertezza δX_{ris} è misurata a partire dalla conoscenza dell'intervallo di risoluzione ΔX . All'intervallo di risoluzione può essere associata una distribuzione a rettangolo (distribuzione a densità uniforme).

Esempio 3: L'incertezza δX_{sis} dovuta alla *stima degli errori sistematici* è generalmente considerata di Categoria B, cioè di origine non statistica. In taluni casi però, ad esempio quando la stima si basa sul confronto tra misure inconsistenti secondo la procedura del § 4.4.4, l'incertezza δX_{sis} va attribuita alla Categoria A. È in ogni caso conveniente associare all'errore sistematico una distribuzione modello (normale, a rettangolo, a triangolo, etc.), costruita di volta in volta in base alle informazioni disponibili.

4.5.2 Espressione unificata dell'incertezza

L'unificazione dei criteri per l'espressione dell'incertezza di misura si basa sulle seguenti convenzioni:

- a) Ad ogni causa di incertezza è associata una opportuna **distribuzione**, che può essere di origine statistica (Categoria A) oppure costruita a priori in base alle informazioni comunque disponibili (Categoria B).
- b) L'incertezza δX è assunta uguale allo **scarto tipo** (o *scarto quadratico medio*, in inglese *standard deviation*) della distribuzione. L'incertezza così definita è detta **incertezza tipo** (o *incertezza standard*, in inglese *standard uncertainty*).

Esempio 1: Come abbiamo visto al § 4.3, l'incertezza δX_{cas} dovuta agli *errori casuali* è assunta uguale allo scarto tipo della distribuzione limite dei valori medi (Eq. 4.3.21):

$$\delta X_{\text{cas}} = \sigma[m^*] \quad (4.5.1)$$

e può essere *stimata* a partire dai dati sperimentali usando l'Eq. (4.3.24):

$$\delta X_{\text{cas}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*)^2}. \quad (4.5.2)$$

La distribuzione delle medie è con buona approssimazione normale (Fig. 4.10 a destra); l'intervallo tra $X_0 - \sigma[m^*]$ e $X_0 + \sigma[m^*]$ rappresenta il 68 % dei valori possibili.

Esempio 2: L'incertezza δX_{ris} dovuta alla *risoluzione* è associata ad una distribuzione a rettangolo di base ΔX e altezza $1/\Delta X$ (Fig. 4.10 a sinistra). Come dimostreremo al Cap. 6, per la distribuzione a rettangolo lo scarto tipo è $\sigma = \Delta X/\sqrt{12}$, per cui

$$\delta X_{\text{ris}} = \Delta X / \sqrt{12}. \quad (4.5.3)$$

L'intervallo tra $X_0 - \delta X$ e $X_0 + \delta X$ rappresenta il 58 % dell'area del rettangolo.

Esempio 3: Nel caso degli *errori sistematici* la distribuzione viene ipotizzata in base alle conoscenze disponibili. Supponiamo ad esempio di poter stabilire che il valore della grandezza X non può comunque essere inferiore a X_{min} o superiore a X_{max} . In assenza di ulteriori informazioni è ragionevole assumere una distribuzione a rettangolo (Fig. 4.10 a sinistra). Se però si ritiene plausibile che i valori centrali siano più probabili dei valori vicini ai limiti X_{min} e X_{max} , allora è più ragionevole assumere una distribuzione a triangolo o una distribuzione normale (Fig. 4.10, al centro e a destra). Una volta fatta una scelta della distribuzione se ne calcolerà lo scarto tipo, secondo le procedure che saranno introdotte al Cap. 6, per determinare δX_{sis} .

La scelta di identificare sempre l'incertezza, qualunque ne sia l'origine, con lo scarto tipo di una distribuzione offre molti vantaggi. In particolare è possibile confrontare ed eventualmente comporre in modo coerente incertezze di diversa origine.

Inoltre, come vedremo in particolare nei Capitoli 6 e ?? , molti formalismi per l'analisi statistica dei dati si basano sulle peculiari proprietà della distribuzione normale e dei suoi parametri m e σ (uno di questi formalismi, il metodo della media pesata, è già stato introdotto al § 4.4). Identificando sempre l'incertezza con uno scarto tipo, è possibile applicare con buona approssimazione i formalismi sviluppati per le distribuzioni normali anche alle incertezze di origine non statistica.

Nota: L'intervallo individuato dallo scarto tipo intorno al valore centrale X_0 rappresenta una parte dei possibili valori di misura (circa il 68 % per la distribuzione normale, circa il 58 % per la distribuzione a rettangolo). In talune applicazioni è preferibile esprimere l'incertezza come un intervallo di valori entro cui la misura cada con probabilità vicina a 1; si usa allora l'*incertezza estesa*, ottenuta moltiplicando lo scarto tipo (cioè l'incertezza tipo) per un opportuno *fattore di copertura*, tipicamente 2 oppure 3 nel caso di distribuzioni normali. Torneremo più diffusamente su questo problema al § 7.4. Le deroghe dall'espressione standard dell'incertezza devono comunque essere sempre indicate esplicitamente.

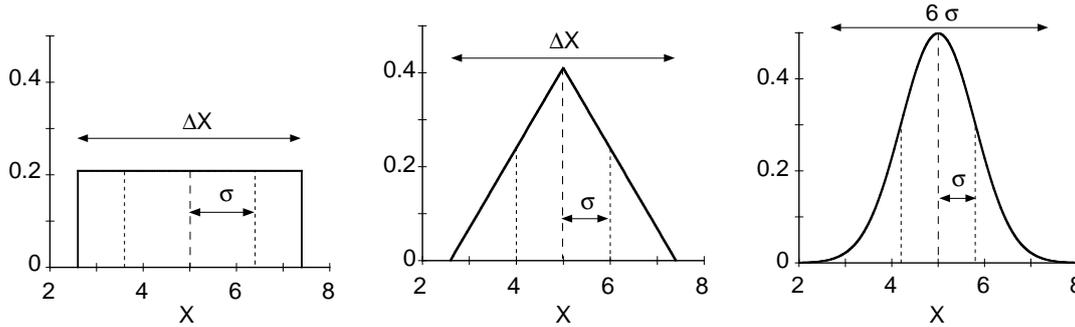


Figura 4.10: Distribuzioni a rettangolo (a sinistra), a triangolo (al centro) e normale di Gauss (a destra). Le distribuzioni sono normalizzate ad area unitaria. Per comodità di confronto le tre distribuzioni hanno uguale valor medio $m=5$ e larghezza simile. Lo scarto tipo è $\sigma = \Delta X/\sqrt{12}$ per la distribuzione a rettangolo, $\sigma = \Delta X/\sqrt{24}$ per la distribuzione a triangolo; per la distribuzione normale l'intervallo di larghezza 6σ centrato sul valor medio racchiude il 99.74 % dell'intera distribuzione. La percentuale d'area compresa tra $X = m - \sigma$ e $X = m + \sigma$ è rispettivamente il 58, il 65 e il 68 % per le distribuzioni a rettangolo, a triangolo e normale.

4.5.3 Confronto tra le diverse cause di incertezza

Le incertezze dovute alla *risoluzione* della misura o alla presenza di *errori casuali* in genere si escludono mutuamente, nel senso che si deve tenere conto esclusivamente dell'una oppure dell'altra. Più precisamente, è opportuno tenere conto della maggiore delle due incertezze.

Supponiamo, ad esempio, di misurare una grandezza X con una risoluzione ΔX , corrispondente ad un'incertezza $\delta X_{\text{ris}} = \Delta X/\sqrt{12}$.

Supponiamo anche che gli errori casuali diano luogo ad una dispersione di valori descritta da una distribuzione gaussiana, con scarto quadratico medio σ_x . Come abbiamo visto al § 4.3, l'incertezza dovuta agli errori casuali è $\delta X_{\text{cas}} = \sigma[m^*] = \sigma_x/\sqrt{N}$, dove N è il numero di misurazioni.

Al crescere di N , l'incertezza δX_{cas} diminuisce proporzionalmente a $1/\sqrt{N}$. Sembrerebbe pertanto possibile ridurre a piacere l'incertezza della misura aumentando convenientemente il numero N di misurazioni. In realtà l'incertezza della misura può essere identificata con quella dovuta agli errori casuali, $\delta X = \delta X_{\text{cas}}$, solo fintantoché

$$\delta X_{\text{cas}} > \delta X_{\text{ris}}, \quad \text{cioè} \quad \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} > \frac{\Delta X}{\sqrt{12}}. \quad (4.5.4)$$

Tra le due cause di incertezza (risoluzione ed errori casuali) prevale sempre quella che dà il contributo maggiore. Di conseguenza, è inutile aumentare indiscriminatamente il numero N di misurazioni per ridurre l'incertezza δX_{cas} . Dalla disequazione (4.5.4) è immediato determinare un limite superiore al numero N di misurazioni:

$$N \leq \frac{12 \sigma_x^2}{(\Delta X)^2}. \quad (4.5.5)$$

La risoluzione della misura rappresenta un limite inferiore all'incertezza δX . Come abbiamo visto al § 4.2, è spesso possibile, mediante opportune tecniche, ridurre anche l'incertezza dovuta alla risoluzione, δX_{ris} .

La relativa facilità con cui si possono valutare ed eventualmente ridurre le incertezze dovute a risoluzione o errori casuali non deve mai far dimenticare la terza fonte di incertezza delle misure, cioè la presenza di *errori sistematici* non riconosciuti e quindi non corretti.

Valutare l'incertezza δX_{sis} dovuta agli errori sistematici non è generalmente facile. È frequente il caso di misure in cui δX_{sis} è sottostimata o addirittura trascurata del tutto.

Abbiamo comunque già visto, al § 4.4.4, che misure ripetute in condizioni differenti consentono talora di valutare in termini statistici l'influenza degli errori sistematici. Incontreremo più avanti altre analoghe situazioni.

4.5.4 Composizione di incertezze

L'incertezza dovuta alla stima degli errori sistematici è indipendente dall'incertezza da risoluzione o da errori casuali. Nel quotare l'incertezza di una misura, è in genere utile distinguere esplicitamente i due tipi di contributi (δX_{sis} da un lato, δX_{cas} o δX_{ris} dall'altro).

In alcuni casi si possono distinguere più sorgenti indipendenti di errori sistematici, e può essere utile quotare separatamente le rispettive incertezze.

Talora però si presenta la necessità di quotare in modo sintetico un'incertezza complessiva della misura, δX_{tot} , che tenga opportunamente in conto il contributo dei diversi tipi di incertezza valutati (ad esempio δX_{sis} e δX_{cas} , oppure δX_{sis} e δX_{ris}).

In questi casi, se si è avuto cura di esprimere tutte le incertezze in termini di scarto tipo di un'opportuna distribuzione, l'incertezza complessiva della misura andrà espressa come *somma quadratica* delle diverse incertezze componenti.

Ad esempio:

$$\delta X_{\text{tot}} = \sqrt{(\delta X_{\text{cas}})^2 + (\delta X_{\text{sis}})^2}, \quad (4.5.6)$$

o più in generale, indicando con δX_i le diverse cause di incertezza,

$$\delta X_{\text{tot}} = \sqrt{\sum_i (\delta X_i)^2}. \quad (4.5.7)$$

La motivazione di questa procedura di somma quadratica sarà chiarita nel § 4.6.2.

4.5.5 Espressioni dell'incertezza

Nell'espressione dei risultati di misura nella forma $X = X_0 \pm \delta X$, δX è spesso chiamata **incertezza assoluta**. L'incertezza assoluta ha le stesse dimensioni del valore centrale X_0 .

È bene far presente qui che l'incertezza δX , comunque sia stata valutata, va sempre espressa mediante una o al massimo due cifre significative, e che il valore centrale X_0 va espresso con un numero di cifre significative consistente con l'incertezza (per maggiori dettagli sull'uso delle cifre significative si rimanda al § A.1).

Talora viene utilizzato, per esprimere l'incertezza assoluta, un modo alternativo rispetto alla forma $X = X_0 \pm \delta X$. Le cifre significative che esprimono l'incertezza δX vengono scritte tra parentesi immediatamente dopo il valore centrale X_0 ; si sottintende che l'incertezza va applicata alle corrispondenti ultime cifre significative del valore centrale X_0 . Ad esempio, per una misura di lunghezza espressa in metri,

$$\ell = 2.357(25) \text{ m} \quad \text{sta per} \quad \ell = (2.357 \pm 0.025) \text{ m}$$

Questo modo di indicare l'incertezza è frequentemente utilizzato quando le incertezze sono molto piccole rispetto ai valori centrali. È il caso, tipicamente, delle costanti fondamentali della Fisica, alcune delle quali sono riportate nel § D.2. Ad esempio, il valore della massa dell'elettrone è quotato come

$$m_e = 9.109\,381\,88(72) \times 10^{-31} \text{ kg},$$

che equivale a

$$m_e = (9.109\,381\,88 \pm 0.000\,000\,72) \times 10^{-31} \text{ kg}$$

4.5.6 Incertezza relativa

La qualità di una misura non è individuata dal solo valore dell'incertezza assoluta δX , bensì dal rapporto tra incertezza assoluta δX e valore centrale X_0 . Ad esempio, è evidente che un'incertezza $\delta X = 1 \text{ mm}$ ha diverso significato se riferita ad una lunghezza $X_0 = 1 \text{ cm}$ o a una lunghezza $X_0 = 10 \text{ m}$.

Il rapporto

$$\frac{\delta X}{|X_0|} \quad (4.5.8)$$

è detto **incertezza relativa** della misura. Quanto più piccola è l'incertezza relativa, tanto migliore è considerata la qualità della misura.

L'uso del modulo $|X_0|$ nell'eq. (4.5.8) serve ad avere un valore sempre positivo di incertezza relativa, anche quando il valore X_0 è negativo. L'incertezza relativa, essendo il rapporto tra due grandezze che hanno le stesse dimensioni, è sempre una quantità adimensionale.

L'incertezza relativa può assumere valori molto minori di 1. Per evitare l'uso di numeri decimali troppo piccoli, si usa spesso moltiplicare per 100 l'incertezza relativa, ottenendo così l'**incertezza percentuale**, che si indica con il simbolo %.

Se l'incertezza assoluta è molti ordini di grandezza minore del valore centrale, come succede per le misure molto accurate delle costanti fondamentali della Fisica (§ D.2), si usa moltiplicare l'incertezza relativa per il fattore 10^6 , ottenendo l'incertezza espressa in **parti per milione** (ppm).

Esempio 1: La lunghezza di un pendolo, $\ell = 1.25$ m, e la deformazione di una molla, $x = 1.2$ cm, vengono misurati con la stessa incertezza assoluta $\delta\ell = \delta x = 1$ mm. L'incertezza relativa della misura del pendolo, $\delta\ell/\ell = 8 \times 10^{-4} = 0.08$ %, è molto più piccola dell'incertezza relativa nella misura della deformazione della molla, $\delta x/x = 8 \times 10^{-2} = 8$ %.

Esempio 2: La massa dell'elettrone $m_e = 9.109\,381\,88(72) \times 10^{-31}$ kg ha un'incertezza relativa $\delta m/m = 8 \times 10^{-8}$, pari a 0.08 ppm (parti per milione).

4.5.7 Caratteristiche qualitative delle misure

Finora abbiamo caratterizzato le misure delle grandezze fisiche con un parametro quantitativo, l'**incertezza** (in inglese *uncertainty*). Nella pratica di laboratorio vengono spesso usati vari altri termini per qualificare e confrontare le proprietà delle misure.

La **ripetibilità** (in inglese *repeatability*) di una misura indica qualitativamente il grado di accordo tra i risultati di misurazioni diverse eseguite nelle stesse condizioni (stessa procedura, stesso osservatore, stessi strumenti, stesso luogo) e ripetute a breve distanza di tempo. Il concetto di ripetibilità è legato all'influenza degli errori casuali.

La **riproducibilità** (in inglese *reproducibility*) di una misura indica qualitativamente il grado di accordo tra i risultati di misurazioni eseguite in condizioni differenti (ad esempio, differenti procedure, differenti osservatori, differenti strumenti, differenti luoghi, tempi significativamente diversi).

Il termine **accuratezza** (in inglese *accuracy*) viene utilizzato per caratterizzare il grado di concordanza di una data misura con un *valor vero* della grandezza. Per *valor vero* si intende qui un valore accettato, a volte per convenzione, come avente un'incertezza adatta ad un determinato scopo. Si possono ad esempio considerare *valori veri* delle costanti fondamentali della Fisica quelli periodicamente pubblicati dal Comitato internazionale CODATA (vedi § D.2).

I termini introdotti sopra (ripetibilità, riproducibilità, accuratezza) hanno significato puramente qualitativo. Ad essi non è pertanto corretto associare valori numerici.

Nota: Il termine **precisione** veniva utilizzato in passato nell'accezione oggi attribuita al termine *accuratezza*. Nel mondo anglosassone invece il termine *precision* veniva utilizzato nell'accezione che oggi si attribuisce al termine *repeatability*. Per evitare equivoci interpretativi, in particolare nel confronto tra documenti redatti in lingue diverse, i termini *precisione* e *precision* non dovrebbero più essere utilizzati.

4.6 Incertezza nelle misure indirette

Nei paragrafi precedenti abbiamo studiato le cause di incertezza nelle misurazioni *dirette*, ed abbiamo imparato ad esprimere la misura di una grandezza fisica nella forma $X_0 \pm \delta X$. Il valore

centrale X_0 e l'incertezza δX sono stati ricondotti, rispettivamente, al valor medio e allo scarto tipo di una opportuna distribuzione.

Nella pratica sperimentale accade spesso che una grandezza fisica sia misurata *indirettamente*, sfruttando relazioni analitiche che la collegano ad altre grandezze misurate direttamente (§ 1.3.3).

Esempio: Si misurano direttamente la lunghezza ℓ e il periodo di oscillazione \mathcal{T} di un pendolo semplice. L'accelerazione di gravità g viene misurata indirettamente sfruttando la relazione $g = 4\pi^2\ell/\mathcal{T}^2$.

Per generalizzare, chiameremo X, Y, Z, \dots le grandezze misurate direttamente, Q la grandezza misurata indirettamente e $Q = f(X, Y, Z, \dots)$ la relazione analitica che lega il valore di Q ai valori di X, Y, Z, \dots ; ad esempio $Q = X + Y$, oppure $Q = XY/Z$.

Poiché le grandezze X, Y, Z, \dots sono affette da incertezza, ci si aspetta che anche la grandezza Q sia affetta da incertezza, e vada espressa nella forma $Q_0 \pm \delta Q$, con Q_0 e δQ riconducibili rispettivamente al valor medio e allo scarto tipo di una opportuna distribuzione.

In questo paragrafo impareremo a determinare il valore centrale Q_0 e valutare l'incertezza δQ a partire dai valori X_0, Y_0, Z_0, \dots e dalle incertezze $\delta X, \delta Y, \delta Z, \dots$. L'incertezza δQ è detta *incertezza composta* (ingl. *combined uncertainty*).

Questo problema, che va sotto il nome di *propagazione dell'incertezza*, è piuttosto complesso, e pertanto lo affronteremo in modo graduale. Chiariremo innanzitutto il concetto fondamentale di indipendenza statistica delle misure. Poi studieremo la propagazione nei casi più semplici, in cui Q dipende linearmente da X, Y, Z, \dots . Infine studieremo relazioni funzionali più complesse, per arrivare a formulare una regola approssimata di applicazione generale. Una giustificazione più approfondita di molti dei concetti presentati in questo paragrafo verrà fornita nel Cap. 7.

4.6.1 Indipendenza statistica delle misure dirette

Fissiamo l'attenzione su due grandezze, X e Y , misurate direttamente, e supponiamo di conoscere con buona approssimazione le rispettive distribuzioni limite ed i loro valori medi X_0 e Y_0 .

Se ora consideriamo due singole misure, x e y , possiamo calcolare i loro scarti rispetto ai valori medi: $x - X_0$ e $y - Y_0$. Le misure delle due grandezze X e Y sono dette *statisticamente indipendenti* se gli scarti $x - X_0$ e $y - Y_0$ sono tra di loro scorrelati; in altri termini, se la conoscenza dello scarto $x - X_0$ non consente di fare alcuna previsione sul valore dello scarto $y - Y_0$, e viceversa. Il concetto di indipendenza statistica è immediatamente generalizzabile ad un numero qualsiasi di grandezze fisiche.

L'indipendenza statistica delle misure di due o più grandezze fisiche non va confusa con l'eventuale correlazione tra le due grandezze stesse, di cui ci occuperemo al §4.7.

Esempio 1: Si misurano lunghezza e periodo di oscillazione di un pendolo semplice. È facile rendersi conto che le due grandezze sono tra di loro *correlate*: aumentando la lunghezza del pendolo aumenta regolarmente anche il periodo. Le misure di lunghezza e periodo sono tuttavia *statisticamente indipendenti*.

Esempio 2: Si vuole misurare il perimetro P di un poligono con un metro a nastro. Allo scopo si misurano direttamente i singoli lati a, b, c, \dots del poligono e si calcola poi il perimetro come somma dei lati: $P = a + b + c + \dots$. Supponiamo che la causa maggiore di incertezza nella misura sia da attribuire a scarsa fiducia nella calibrazione del metro; si ha quindi motivo di ritenere che tutte le misure siano errate nello stesso senso (per difetto o per eccesso), e quindi non siano statisticamente indipendenti.

Nei prossimi tre paragrafi (§ 4.6.2, 4.6.3, 4.6.4) considereremo la propagazione dell'incertezza a partire da misure dirette statisticamente indipendenti. Il caso di misure non indipendenti è più complesso; ce ne occuperemo in modo non esaustivo al § 4.6.5.

4.6.2 Dipendenza lineare di Q da X, Y, \dots

La propagazione dell'incertezza è particolarmente semplice se la relazione che lega la grandezza Q alle grandezze X, Y, Z, \dots (misurate direttamente) è di tipo lineare, cioè esprimibile nella forma

generale

$$Q = a + bX + cY + dZ \dots \quad (4.6.1)$$

dove a, b, c, d, \dots sono coefficienti costanti.

Alla forma generale (4.6.1) sono riconducibili i casi notevoli

$$\begin{aligned} Q &= X + Y && \text{(addizione),} \\ Q &= X - Y && \text{(sottrazione),} \\ Q &= bX && \text{(diretta proporzionalità).} \end{aligned}$$

Se la relazione che lega Q a X, Y, Z, \dots è lineare, la media e lo scarto tipo dei valori di Q sono facilmente ricavabili a partire dalle medie e dagli scarti tipo dei valori di X, Y, Z, \dots sfruttando alcune proprietà generali delle distribuzioni di probabilità.

Un teorema della teoria delle probabilità afferma infatti che, se vale l'eq. (4.6.1), allora il valor medio $\mathbf{m}[Q]$ è legato alle medie di X, Y, Z, \dots dalla relazione

$$\mathbf{m}[Q] = a + b\mathbf{m}[X] + c\mathbf{m}[Y] + d\mathbf{m}[Z] + \dots \quad (4.6.2)$$

Se inoltre le misure di X, Y, Z, \dots sono *statisticamente indipendenti*, un ulteriore teorema afferma che la varianza $\mathbf{D}[Q]$ è legata alle varianze di X, Y, Z, \dots dalla relazione

$$\mathbf{D}[Q] = b^2 \mathbf{D}[X] + c^2 \mathbf{D}[Y] + d^2 \mathbf{D}[Z] + \dots \quad (4.6.3)$$

da cui si ricava la relazione relativa allo scarto tipo $\sigma[Q]$:

$$\sigma[Q] = \sqrt{b^2 \mathbf{D}[X] + c^2 \mathbf{D}[Y] + d^2 \mathbf{D}[Z] + \dots} \quad (4.6.4)$$

Pertanto, ricordando che il valore centrale di una misura è espresso dalla media della corrispondente distribuzione, dall'eq. (4.6.2) si ricava

$$Q_0 = a + bX_0 + cY_0 + dZ_0 + \dots \quad (4.6.5)$$

Dalle eq. (4.6.3) e (4.6.4), ricordando che l'incertezza di una misura è espressa dallo scarto tipo della corrispondente distribuzione, si ricava

$$(\delta Q)^2 = b^2 (\delta X)^2 + c^2 (\delta Y)^2 + \dots \quad \delta Q = \sqrt{b^2 (\delta X)^2 + c^2 (\delta Y)^2 + \dots} \quad (4.6.6)$$

In altri termini, l'incertezza δQ si calcola *sommando quadraticamente* le incertezze $\delta X, \delta Y, \dots$ pesate dai rispettivi coefficienti b^2, c^2, \dots

Nota: È facile rendersi conto che la *somma quadratica* di due numeri è sempre minore della loro *somma diretta*: $\sqrt{s^2 + t^2} < s + t$. Basta considerare un triangolo rettangolo di cateti s e t : la somma dei cateti $s + t$ è sempre maggiore dell'ipotenusa $\sqrt{s^2 + t^2}$.

Esempio: Al § 4.5.H, eq. (4.5.12), abbiamo introdotto la **media pesata**:

$$X_w = \frac{\sum_i X_i w_i}{\sum_i w_i}, \quad \delta X_w = \frac{1}{\sqrt{\sum_i w_i}}, \quad \text{con} \quad w_i = \frac{1}{(\delta X_i)^2}.$$

Siamo ora in grado di dare una giustificazione per l'espressione dell'incertezza δX_w . È facile rendersi conto che l'espressione della media pesata X_w è una combinazione lineare dei valori X_i , con coefficienti $w_i / \sum w_i$, riconducibile alla forma dell'eq. (4.6.1), con $Q \equiv X_w$. Applicando l'eq. (4.6.6) e ricordando che $w_i = 1/(\delta X_i)^2$, si ottiene

$$(\delta X_w)^2 = \frac{1}{(\sum w_i)^2} \sum w_i^2 (\delta X_i)^2 = \frac{1}{(\sum w_i)^2} \sum w_i = \frac{1}{\sum w_i}.$$

Vediamo ora in concreto l'applicazione delle eq. (4.6.5) e (4.6.6) ad alcuni casi notevoli particolarmente semplici.

Addizione di grandezze: $Q = X + Y$

Nel caso di un'addizione, $Q = X + Y$, le eq. (4.6.5) e (4.6.6) danno

$$Q_0 = X_0 + Y_0 \quad (\delta Q)^2 = (\delta X)^2 + (\delta Y)^2 \quad (4.6.7)$$

È immediata la generalizzazione delle eq. (4.6.7) al caso di addizione di più di due grandezze.

Esempio 1: Si vuole misurare la pressione P di un gas contenuto in un recipiente a tenuta. Allo scopo si hanno a disposizione due strumenti: un manometro che consente di misurare la pressione relativa del gas rispetto all'atmosfera, P_{rel} , ed un barometro che consente di misurare la pressione atmosferica, P_{atm} . Le due misure sono statisticamente indipendenti, ed i relativi valori sono: $P_{\text{rel}} = (0.475 \pm 0.004)$ bar e $P_{\text{atm}} = (0.988 \pm 0.002)$ bar. La pressione del gas è $P = P_{\text{rel}} + P_{\text{atm}}$. Usando le eq. (4.6.7) si ottiene $P_0 = (0.475 + 0.998) = 1.473$ bar, $\delta P = [(\delta P_{\text{rel}})^2 + (\delta P_{\text{atm}})^2]^{1/2} = 0.0044$ bar.

Esempio 2: Al § 4.5.4 abbiamo suggerito di addizionare quadraticamente le incertezze di una stessa misura dovute a cause diverse (eq. 4.5.6). Questa procedura è giustificata, se le cause di incertezza sono statisticamente indipendenti, dalla seconda delle eq. (4.6.7). Supponiamo di avere una misura $X_0 \pm \delta X_a$; tenere conto di un'ulteriore incertezza indipendente δX_b equivale formalmente ad aggiungere a $X_0 \pm \delta X_a$ la quantità $0 \pm \delta X_b$.

Sottrazione di due grandezze: $Q = X - Y$

Nel caso di sottrazione, $Q = X - Y$, le eq. (4.6.5) e (4.6.6) danno

$$Q_0 = X_0 - Y_0 \quad (\delta Q)^2 = (\delta X)^2 + (\delta Y)^2 \quad (4.6.8)$$

In altri termini, i valori centrali si sottraggono, ma le incertezze si sommano quadraticamente come nel caso dell'addizione.

Esempio: Si vuole misurare la massa d'acqua m contenuta in un calorimetro. Allo scopo si pesa preventivamente il calorimetro vuoto, ottenendo un valore di massa $m_c = (257.3 \pm 0.1)$ g; successivamente si pesa il calorimetro con l'acqua, ottenendo un valore di massa totale $m_t = (298.5 \pm 0.1)$ g. La massa netta dell'acqua è $m_0 = 298.5 - 257.3 = 41.2$ g. L'incertezza è $\delta m = [(0.1)^2 + (0.1)^2]^{1/2} = 0.14$ g.

Si faccia attenzione alla sottrazione tra valori X_0 e Y_0 molto simili: la differenza può essere confrontabile o inferiore all'incertezza. Ad esempio, $(251 \pm 1) - (250 \pm 1) = 1 \pm 1.4$.

Diretta proporzionalità: $Q = bX$

Nel caso di diretta proporzionalità, $Q = bX$, le eq. (4.6.5) e (4.6.6) danno

$$Q_0 = bX_0 \quad \delta Q = |b| \delta X \quad (4.6.9)$$

Esempio: La lunghezza d'onda λ ed il periodo \mathcal{T} di un'onda elettromagnetica che si propaga nel vuoto sono legati dalla relazione $\lambda = c\mathcal{T}$, dove c , la velocità della luce nel vuoto, è una costante esatta. L'incertezza $\delta\mathcal{T}$ sul periodo si propaga alla lunghezza d'onda come $\delta\lambda = c\delta\mathcal{T}$.

Cerchiamo di approfondire il significato dell'eq. (4.6.9). Nel caso di diretta proporzionalità, $Q = bX$, il coefficiente b è la derivata di Q rispetto ad X : $b = dQ/dX$, costante per tutti i valori di X . Graficamente (Fig. 4.11) b è la pendenza della retta che rappresenta la funzione $Q = bX$. La propagazione dell'incertezza da X a Q dipende dalla pendenza della retta, cioè dal coefficiente di proporzionalità.

4.6.3 Q funzione non lineare di una sola variabile X

Se la relazione che lega Q a X, Y, Z, \dots non è lineare, cioè non è riconducibile all'eq. (4.6.1), il problema del calcolo del valore centrale Q_0 e dell'incertezza δQ è molto più complesso, e può essere risolto solo in maniera approssimata.

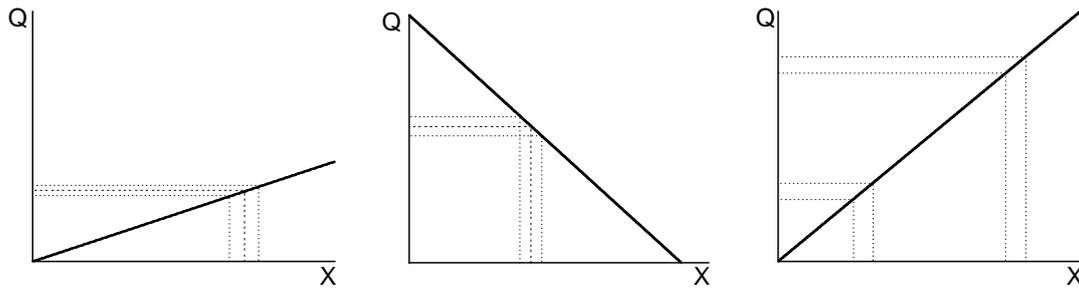


Figura 4.11: Illustrazione grafica della propagazione dell'incertezza nel caso della diretta proporzionalità: $Q = bX$. L'incertezza δQ dipende dall'incertezza δX e dalla pendenza b della retta: $\delta Q = |a|\delta X$ (a sinistra e al centro). L'incertezza δQ non dipende invece, nel caso di diretta linearità, dal valore X_0 (a destra).

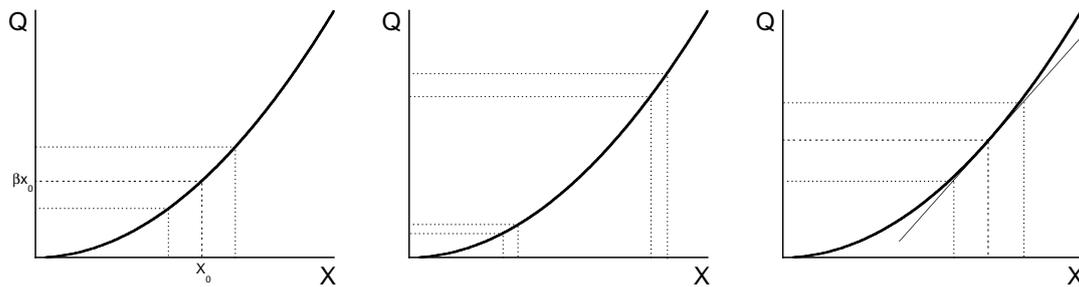


Figura 4.12: Illustrazione grafica della propagazione dell'incertezza nel caso $Q = \beta X^2$. A sinistra: il centro Q_0 dell'intervallo di incertezza $2\delta Q$ non corrisponde ad βX_0^2 . Al centro: a parità di δX , δQ varia al variare di X_0 . A destra: linearizzazione locale della funzione $Q = \beta X^2$.

Per meglio comprendere la natura delle difficoltà e la filosofia della soluzione, consideriamo il caso più semplice possibile, cioè una relazione non lineare $Q = f(X)$ tra Q ed una sola grandezza X misurata direttamente. Supponiamo di conoscere, per misurazione diretta, $X_0 \pm \delta X$. Vogliamo esprimere anche il valore di Q nella forma $Q_0 \pm \delta Q$. Possiamo porre semplicemente $Q_0 = f(X_0)$? E come si calcola δQ a partire da δX ?

Per chiarire le idee, consideriamo prima il caso particolare $Q = \beta X^2$.

Esempio: Si misura direttamente il diametro $2R$ di un cilindro e si ricava il valore del raggio $R_0 \pm \delta R$.

A questo punto si può misurare indirettamente la sezione S del cilindro, mediante la relazione $S = \pi R^2$. Come si esprimerà il valore della sezione nella forma standard $S_0 \pm \delta S$?

Il grafico della funzione $Q = \beta X^2$ è una parabola (Fig. 4.12). Consideriamo un generico valore X_0 e l'intervallo di incertezza di valore $2\delta X$ centrato su X_0 . È facile costruire graficamente l'intervallo di incertezza $2\delta Q$; il suo calcolo analitico è invece piuttosto brigoso. È facile anche verificare che il valore Q_0 , centro dell'intervallo di incertezza $2\delta Q$, non corrisponde ad βX_0^2 (Fig. 4.12, a sinistra). Infine, la medesima incertezza δX corrisponde ad incertezze δQ diverse al variare di X_0 (Fig. 4.12, al centro).

Torniamo ora al caso generico $Q = f(X)$.

Il calcolo di Q_0 e dell'incertezza δQ viene notevolmente semplificato se si opera in *approssimazione di linearità locale*, ovvero se si sostituisce la funzione $f(X)$, nell'intervallo di incertezza $2\delta X$, con una retta $Q = a + BX$ tangente alla curva della funzione $f(X)$ nel punto di ascissa X_0 (Fig. 4.12, a destra):

$$Q = f(X) \quad \rightarrow \quad Q = a + bX. \quad (4.6.10)$$

In questo modo ci si può ricondurre, seppure localmente ed in forma approssimata, al caso della diretta proporzionalità, eq. (4.6.9). Più precisamente, il valore centrale Q_0 sarà dato da $f(X_0)$, e

l'incertezza δQ da $|b| \delta X$, dove ora b è la derivata prima di Q rispetto a X , calcolata in X_0 :

$$Q_0 \simeq f(X_0) \quad \delta Q \simeq \left. \frac{dQ}{dX} \right|_0 \delta X. \quad (4.6.11)$$

(L'indice 0 indica, in modo sintetico, che la derivata prima va calcolata in corrispondenza di $X = X_0$).

Esempio: Riprendiamo l'esempio precedente del raggio e della sezione di un cilindro. Supponiamo di avere misurato, con la stessa incertezza $\delta R = 0.01$ mm, il raggio di due cilindri diversi.

Il primo cilindro ha un raggio $R = (0.5 \pm 0.01)$ mm. Applicando le eq. (4.6.11) si trova che la sezione è $S = \pi R^2 = (0.78 \pm 0.03)$ mm².

Il secondo cilindro ha un raggio $R = (5 \pm 0.01)$ mm. Applicando le eq. (4.6.11) si trova che la sezione è $S = \pi R^2 = (78.5 \pm 0.3)$ mm².

Nonostante le incertezze su R siano uguali, l'incertezza assoluta δS sulla sezione è dieci volte maggiore nel secondo caso che nel primo (l'incertezza relativa è invece dieci volte inferiore!)

L'approssimazione di linearità locale è tanto più valida quanto più piccola è l'incertezza δX rispetto al valore centrale X_0 .

Elevamento a potenza: $Q = X^n$

Consideriamo il caso particolare che la funzione $Q = f(x)$ sia un elevamento a potenza: $Q = X^n$. In questo caso, applicando le regole date nelle equazioni (4.6.11), si trova

$$Q_0 \simeq X_0^n \quad \delta Q \simeq n |X_0^{n-1}| \delta X, \quad \text{cioè} \quad \frac{\delta Q}{|Q_0|} \simeq n \frac{\delta X}{|X_0|}. \quad (4.6.12)$$

In altri termini, l'incertezza relativa della grandezza Q è n volte l'incertezza relativa della grandezza X .

4.6.4 Formula generale per la propagazione dell'incertezza

Siamo ora in grado di affrontare il problema del calcolo del valore centrale Q_0 e dell'incertezza δQ nel caso generale $Q = f(X, Y, Z, \dots)$.

Per semplificare la trattazione senza perdere comunque di generalità, consideriamo il caso di due sole grandezze misurate direttamente: $Q = f(X, Y)$. Ad esempio, $Q = XY$ oppure $Q = X/Y$.

Esempio 1: Si misura la lunghezza di due lati, a e b , di un rettangolo e si calcola la superficie $S = ab$.

Esempio 2: Si misurano direttamente la differenza di potenziale elettrico V applicata ad un resistore e la corrente elettrica I che lo percorre. Il valore della resistenza R può essere ricavato dalla legge di Ohm: $R = V/I$.

Anche in questo caso, come nel caso più semplice di una sola variabile $Q = f(X)$, la soluzione approssimata al problema del calcolo di Q_0 e δQ si basa sulla *linearizzazione locale* della funzione $f(X, Y)$ in un intorno dei valori centrali X_0 e Y_0 , in modo da sostituire localmente la superficie $f(X, Y)$ con il piano tangente alla superficie nel punto di coordinate (X_0, Y_0) :

$$Q = f(X, Y) \quad \rightarrow \quad Q = a + bX + cY. \quad (4.6.13)$$

I coefficienti b e c dell'eq. (4.6.13) corrispondono alle *derivate parziali prime* di Q rispetto a X e Y , calcolate per $X = X_0$ e $Y = Y_0$:

$$b = \left(\frac{\partial Q}{\partial X} \right)_0 \quad c = \left(\frac{\partial Q}{\partial Y} \right)_0; \quad (4.6.14)$$

Nota: Data una funzione di più variabili $Q = f(X, Y, Z, \dots)$, la derivata parziale prima di Q rispetto ad una qualsiasi variabile, ad es. X , si calcola come una normale derivata, considerando le

altre variabili come parametri costanti. Nell'eq. (4.6.14) l'indice 0 significa che le derivate vanno calcolate per $X = X_0$ e $Y = Y_0$.

Il problema può ora venire ancora ricondotto, seppure localmente ed in modo approssimato, al caso lineare del § 4.6.2. Se, come abbiamo finora supposto, le grandezze X e Y sono *statisticamente indipendenti*, allora

$$Q_0 \simeq f(X_0, Y_0); \quad (\delta Q)^2 \simeq \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_0^2 (\delta X)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial Y}\right)_0^2 (\delta Y)^2. \quad (4.6.15)$$

In altri termini, l'incertezza δQ si ottiene dalla somma quadratica delle incertezze δX e δY , ciascuna pesata per la corrispondente derivata parziale.

La generalizzazione al caso di più di due grandezze misurate direttamente, $Q = f(X, Y, Z, \dots)$, è immediata:

$$(\delta Q)^2 \simeq \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_0^2 (\delta X)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial Y}\right)_0^2 (\delta Y)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial Z}\right)_0^2 (\delta Z)^2 + \dots \quad (4.6.16)$$

Ancora possiamo osservare che l'approssimazione di linearità locale è tanto più valida quanto più piccole sono le incertezze rispetto ai valori centrali.

Vediamo ora in concreto l'applicazione dell'eq. (4.6.16) ad alcuni casi particolarmente significativi.

Moltiplicazione di due grandezze: $Q = XY$

Nel caso di una moltiplicazione, $Q = XY$, il valore centrale sarà approssimato da

$$Q_0 \simeq X_0 Y_0. \quad (4.6.17)$$

Per quanto riguarda l'incertezza, applicando l'eq. (4.6.15),

$$(\delta Q)^2 \simeq \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_0^2 (\delta X)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial Y}\right)_0^2 (\delta Y)^2 = Y_0^2 (\delta X)^2 + X_0^2 (\delta Y)^2. \quad (4.6.18)$$

L'eq. (4.6.18) assume una forma più facile da ricordare se si dividono i membri dell'equazione per $Q_0^2 = X_0^2 Y_0^2$:

$$\left(\frac{\delta Q}{Q_0}\right)^2 \simeq \left(\frac{\delta X}{X_0}\right)^2 + \left(\frac{\delta Y}{Y_0}\right)^2. \quad (4.6.19)$$

L'*incertezza relativa* su Q è la somma quadratica delle incertezze relative su X e Y .

Divisione tra due grandezze: $Q = X/Y$

Nel caso di una divisione, $Q = X/Y$, il valore centrale sarà approssimato da

$$Q_0 \simeq X_0/Y_0. \quad (4.6.20)$$

Per quanto riguarda l'incertezza, applicando l'eq. (4.6.15),

$$(\delta Q)^2 \simeq \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_0^2 (\delta X)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial Y}\right)_0^2 (\delta Y)^2 = \frac{1}{Y_0^2} (\delta X)^2 + \frac{X_0^2}{Y_0^4} (\delta Y)^2. \quad (4.6.21)$$

L'eq. (4.6.21) assume una forma più facile da ricordare se si dividono i membri dell'equazione per $Q_0^2 = X_0^2/Y_0^2$:

$$\left(\frac{\delta Q}{Q_0}\right)^2 \simeq \left(\frac{\delta X}{X_0}\right)^2 + \left(\frac{\delta Y}{Y_0}\right)^2. \quad (4.6.22)$$

Anche nel caso della divisione, quindi, l'*incertezza relativa* su Q è la somma quadratica delle incertezze relative su X e Y .

4.6.5 Caso di misure dirette statisticamente non indipendenti

Le procedure di propagazione dell'incertezza che abbiamo finora studiato si riferiscono a misure dirette statisticamente indipendenti. Non sempre però la condizione di indipendenza è verificata.

Per capire quale può essere la differenza, nella procedura di propagazione, tra misure statisticamente indipendenti e non, consideriamo due esempi molto semplici.

Esempio 1: Si vuole misurare il perimetro P di un quadrato. Allo scopo si misura direttamente il lato a , ottenendo $a_0 \pm \delta a$. Consideriamo ora due diverse procedure per calcolare l'incertezza su P .

La procedura più semplice consiste nel calcolare il perimetro come $P = 4a$. Utilizzando l'eq. (4.6.9) si ottiene quindi $\delta P = 4 \delta a$.

Una seconda procedura consiste nel calcolare il perimetro come $P = a + a + a + a$. Può sembrare logico, a questo punto, applicare la formula (4.6.7) e calcolare l'incertezza su P mediante somma quadratica: $(\delta P)^2 = 4 (\delta a)^2$, per cui $\delta P = 2 \delta a$. Una riflessione più attenta mostra che questa seconda procedura è sbagliata: non si può infatti utilizzare l'eq. (4.6.7), in quanto le quattro grandezze che vengono sommate sono *identiche*, e quindi statisticamente *non* indipendenti.

Esempio 2: Si vuole misurare l'area della superficie S di un quadrato. Allo scopo si misura direttamente il lato a , come nell'esempio precedente, ottenendo $a_0 \pm \delta a$. Consideriamo ancora due diverse procedure per calcolare l'incertezza su S .

La procedura più semplice consiste nel calcolare l'area come $S = a^2$. Utilizzando l'eq. (4.6.11) si ottiene quindi $\delta S = 2a \delta a$.

Una seconda procedura consiste nel calcolare l'area come $S = a \cdot a$. Utilizzando l'eq. (4.6.18) si ottiene $(\delta S/S)^2 = 2 (\delta a/a)^2$, per cui $\delta S = \sqrt{2} a \delta a$. Anche in questo caso, una riflessione più attenta mostra che la seconda procedura è sbagliata: non si può infatti utilizzare l'eq. (4.6.18), in quanto le due grandezze che vengono moltiplicate tra loro sono *identiche*, e quindi statisticamente *non* indipendenti.

Questi due semplici esempi mostrano che le formule di propagazione dell'incertezza basate sulle somme quadratiche non sono corrette se le misure dirette non sono statisticamente indipendenti. La propagazione dell'incertezza nel caso in cui le misure dirette non siano statisticamente indipendenti non è tuttavia suscettibile di una trattazione semplice, se non altro perché il grado di dipendenza statistica può variare da caso a caso. Si può comunque dimostrare che esiste un *limite superiore* all'incertezza di una grandezza misurata indirettamente, qualunque sia il grado di dipendenza statistica delle misure dirette. Al § 7.7 dimostreremo che, se $Q = f(X, Y, Z, \dots)$, l'incertezza su Q non può superare il valore

$$(\delta Q)_{\max} \simeq \left| \frac{\partial Q}{\partial X} \right|_0 \delta X + \left| \frac{\partial Q}{\partial Y} \right|_0 \delta Y + \left| \frac{\partial Q}{\partial Z} \right|_0 \delta Z + \dots \quad (4.6.23)$$

4.6.6 Riepilogo

Nei precedenti sotto-paragrafi abbiamo introdotto le regole fondamentali per la propagazione dell'incertezza, partendo dai casi più semplici per arrivare alla fine alla formula più generale.

Vogliamo ora riassumere in modo sintetico i risultati ottenuti.

Innanzitutto è bene ricordare che le considerazioni svolte in questo paragrafo valgono solo se le incertezze sono espresse come scarti tipo di opportune distribuzioni.

Se le misure dirette sono **statisticamente indipendenti**, l'incertezza sulla misura indiretta di $Q(X, Y, Z, \dots)$ può essere calcolata con la formula generale (4.6.16):

$$\delta Q \simeq \sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial X} \right)_0^2 (\delta X)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial Y} \right)_0^2 (\delta Y)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial Z} \right)_0^2 (\delta Z)^2 + \dots} \quad (4.6.24)$$

Se la funzione $Q(X, Y, Z, \dots)$ è *lineare*, cioè $Q = aX + bY + cZ + \dots$, allora l'eq. (4.6.24) è esatta; è facile verificare che l'eq. (4.6.24) è in tal caso equivalente alla (4.6.6).

Nei casi particolari di *addizione* e *sottrazione*, $Q = X + Y$ e $Q = X - Y$, la propagazione dell'incertezza si riduce all'addizione quadratica delle incertezze assolute, eq. (4.6.7) e (4.6.8).

Se la funzione $Q(X, Y, X, \dots)$ è *non lineare*, allora l'eq. (4.6.24) è approssimata: l'approssimazione è tanto migliore quanto più piccole sono le incertezze $\delta X, \delta Y, \dots$ rispetto ai valori centrali X_0, Y_0, \dots . Nei casi particolari di *moltiplicazione* e *divisione*, la propagazione dell'incertezza si riduce all'addizione quadratica delle incertezze relative, eq. (4.6.19) e (4.6.22).

Nel caso di elevamento a potenza, $Q = X^n$, l'incertezza relativa su Q è n volte l'incertezza relativa su X , eq. (4.6.12).

Se le misure dirette sono **statisticamente non indipendenti**, l'eq. (4.6.24) non è più giustificata. Si può dimostrare che l'incertezza su Q non può comunque superare il valore massimo dato dall'eq. (4.6.23):

$$(\delta Q)_{\max} \simeq \left| \frac{\partial Q}{\partial X} \right|_0 \delta X + \left| \frac{\partial Q}{\partial Y} \right|_0 \delta Y + \left| \frac{\partial Q}{\partial Z} \right|_0 \delta Z + \dots \quad (4.6.25)$$

4.7 Correlazione tra grandezze fisiche

La misurazione di *singole grandezze*, di cui ci siamo finora occupati, è molto importante in campo sia scientifico che tecnologico. Per quanto riguarda la Fisica, è incessante lo sforzo per ridurre l'incertezza con cui sono note le cosiddette *costanti fondamentali*: ad es. la massa e la carica elettrica dell'elettrone, il numero di Avogadro, etc. (si veda anche il § D.2).

La ricerca scientifica richiede però soprattutto la misurazione contemporanea di *due o più grandezze*, alla ricerca di relazioni analitiche tra i loro valori che possano essere assunte come *leggi*.

Esempio 1: La misurazione della corrente elettrica I che scorre in un conduttore metallico al variare della differenza di potenziale V porta a riconoscere che le due grandezze sono tra di loro proporzionali (legge di Ohm).

Esempio 2: Consideriamo un gas rarefatto (buona approssimazione di un *gas ideale*). È possibile misurare il volume V in funzione della temperatura T a pressione P costante; oppure la pressione P in funzione della temperatura T a volume V costante; oppure ancora la pressione P in funzione del volume V a temperatura T costante. In tutti i casi si trovano delle correlazioni tra le grandezze misurate, che possono essere globalmente sintetizzate nella cosiddetta *equazione di stato* dei gas ideali: $pV = nRT$, dove n è il numero di moli, e R una costante, detta "costante dei gas".

Abbiamo visto nei paragrafi precedenti che qualsiasi misura di una grandezza fisica è affetta da incertezza. È facile rendersi conto che l'incertezza delle misure gioca un ruolo molto importante anche quando si è alla ricerca di correlazioni tra due o più grandezze fisiche e si vuole esprimere una eventuale correlazione sotto forma di una relazione analitica. L'incertezza delle singole misure si riflette necessariamente in un'incertezza nella relazione analitica tra le grandezze.

Questo paragrafo è dedicato all'introduzione di alcune tecniche utili per riconoscere l'esistenza di una correlazione tra due grandezze fisiche ed esprimerla sotto forma di relazione analitica, tenendo conto delle incertezze di misura. Gli argomenti trattati in questo paragrafo verranno approfonditi nel Cap. 7.

4.7.1 Tabelle e grafici: correlazione tra grandezze

Consideriamo due grandezze fisiche X e Y . Misuriamo \mathcal{N} valori *diversi* della grandezza X , e per ciascun valore valutiamo l'incertezza. In corrispondenza ad ogni valore di X , misuriamo un valore della grandezza Y , valutandone l'incertezza. Otterremo così \mathcal{N} coppie di valori

$$x_i \pm \delta x_i \quad y_i \pm \delta y_i \quad (i = 1 \dots \mathcal{N}).$$

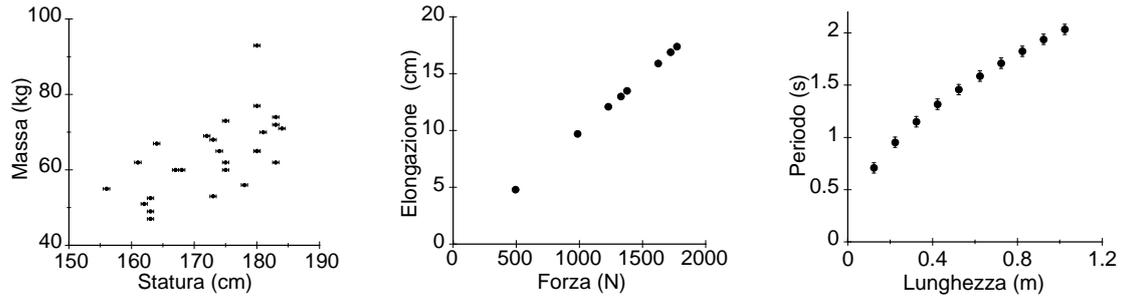


Figura 4.13: Correlazione tra grandezze fisiche (con riferimento ai tre esempi del testo). A sinistra: massa in funzione della statura di un gruppo di persone. Al centro: elongazione di una molla in funzione della forza applicata. A destra: periodo di oscillazione di un pendolo in funzione della lunghezza. Le barre d'incertezza, quando non compaiono esplicitamente, sono minori delle dimensioni dei simboli.

Esempio 1: Un gruppo di \mathcal{N} persone viene sottoposto ad una visita medica. Per ogni persona si misurano sia la statura $h_i \pm \delta h_i$ che la massa $m_i \pm \delta m_i$ ($i = 1 \dots \mathcal{N}$).

Esempio 2: Abbiamo a disposizione una molla elicoidale fissata per un estremo ad un supporto fisso. Sollecitiamo l'altro estremo della molla con una forza variabile. Per ogni valore $F_i \pm \delta F_i$ della forza misuriamo la corrispondente deformazione $y_i \pm \delta y_i$ della molla.

Esempio 3: Facciamo oscillare un pendolo variando la sua distanza ℓ dal punto di sospensione. Per ogni valore della lunghezza $\ell_i \pm \delta \ell_i$ misuriamo il corrispondente valore del periodo di oscillazione $\mathcal{T}_i \pm \delta \mathcal{T}_i$.

Le coppie di valori possono essere elencate in modo sintetico mediante una tabella (vedi § A.1).

Un modo più efficiente per identificare e studiare eventuali correlazioni tra i valori delle grandezze X e Y è costituito dal grafico. Le coppie di valori $(x_i \pm \delta x_i, y_i \pm \delta y_i)$ possono venire rappresentate in un diagramma cartesiano: le coppie di valori centrali (x_i, y_i) sono rappresentate da punti, le incertezze δx_i e δy_i da barre d'errore, rispettivamente orizzontali e verticali. (Maggiori dettagli sull'uso dei grafici sono forniti al § A.3).

La Fig. 4.13 mostra tre grafici relativi ai tre esempi fatti sopra.

Nel primo caso (masse e stature, grafico di sinistra) i punti sono molto dispersi; è tuttavia possibile riconoscere una vaga correlazione tra massa e statura: al crescere della statura, mediamente cresce anche la massa. Studieremo al § 7.8 una procedura che consente di valutare, in base a considerazioni di natura probabilistica, il grado di correlazione in situazioni di questo tipo.

Negli altri due casi (caso della molla, al centro, e caso del pendolo, a destra) non solo è immediato riconoscere che esiste una correlazione tra le due grandezze rappresentate sugli assi x e y , ma è anche ragionevole ipotizzare che le due grandezze siano collegate da una relazione funzionale $y = f(x)$, esprimibile in forma analiticamente semplice. Nel caso della molla (grafico di centro) è evidente una relazione di diretta proporzionalità, $y = Bx$. Nel seguito di questo § 4.7 ci occuperemo dei casi di diretta proporzionalità.

Nel § 7.5 invece ci occuperemo di relazioni funzionali di tipo più generale (come ad esempio quella del grafico di destra nella Fig. 4.13).

4.7.2 Relazioni lineari

Supponiamo che l'osservazione di un grafico ci porti a ritenere plausibile una relazione lineare tra le due grandezze X e Y :

$$Y = A + BX. \quad (4.7.1)$$

È il caso, ad esempio, del grafico centrale della Fig. 4.13. Si presentano allora due problemi:

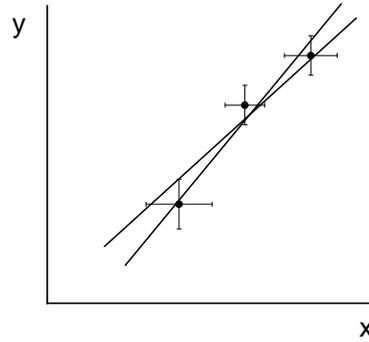


Figura 4.14: Rette di massima e minima pendenza compatibili con le croci di incertezza.

- Determinare i parametri A e B della retta $Y = A + BX$ che meglio interpreta globalmente i punti sperimentali. Affronteremo questo problema in modo grafico già in questo § 4.7.2 e in modo analitico nei § 4.7.3 e 4.7.4.
- Valutare il grado di affidabilità dell'ipotesi che i punti sperimentali siano interpretabili mediante una legge lineare. Inizieremo ad affrontare questo problema al § 4.7.6 rimandando al § 7.6 una trattazione più approfondita.

Una valutazione attendibile dei parametri A e B della retta $Y = A + BX$ e dell'ordine di grandezza delle rispettive incertezze δA e δB può spesso essere ottenuta con il seguente *metodo grafico*.

Si traccino le rette di massima e minima pendenza compatibili con le croci di incertezza dei punti sperimentali (Fig. 4.14). Le due rette avranno equazioni

$$Y = A_1 + B_1 X, \quad Y = A_2 + B_2 X. \quad (4.7.2)$$

È plausibile assumere per i parametri A e B i valori medi

$$A = \frac{A_1 + A_2}{2}, \quad B = \frac{B_1 + B_2}{2}, \quad (4.7.3)$$

e valutare le relative incertezze mediante le relazioni approssimate

$$\delta A \simeq \frac{|A_1 - A_2|}{2}, \quad \delta B \simeq \frac{|B_1 - B_2|}{2}. \quad (4.7.4)$$

4.7.3 Regressione lineare

Una procedura efficiente per calcolare *in modo analitico* i coefficienti A e B della retta $A + BX$ è costituita dalla *regressione lineare* basata sul *metodo dei minimi quadrati*. La procedura si basa sulla ricerca dei parametri A e B che rendono minima la discrepanza globale tra punti sperimentali (x_i, y_i) e retta $Y = A + BX$, tenendo conto dell'incertezza di ogni singolo punto.

Per ogni punto, la discrepanza viene misurata lungo l'asse y , considerando il quadrato della differenza tra le ordinate del punto e della retta (Fig. 4.15, a sinistra):

$$(y_i - A - Bx_i)^2. \quad (4.7.5)$$

Il metodo dei minimi quadrati tiene conto solo delle incertezze δy_i sulla variabile Y . (Supponiamo, per il momento, che le incertezze δx_i siano trascurabili; vedremo più avanti come è possibile tener conto anche delle incertezze δx_i .) Per ogni punto, la discrepanza espressa dall'eq. (4.7.5) viene divisa per l'incertezza $(\delta y_i)^2$, ovvero moltiplicata per il *peso* $w_i = 1/(\delta y_i)^2$. Ciò che conta, per ogni punto, non è quindi la discrepanza assoluta (4.7.5), bensì la discrepanza commisurata all'incertezza δy_i (Fig. 4.15, a destra). La discrepanza globale tra retta e punti sperimentali è misurata dalla sommatoria:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{[y_i - A - Bx_i]^2}{(\delta y_i)^2} = \sum_{i=1}^N w_i [y_i - A - Bx_i]^2. \quad (4.7.6)$$

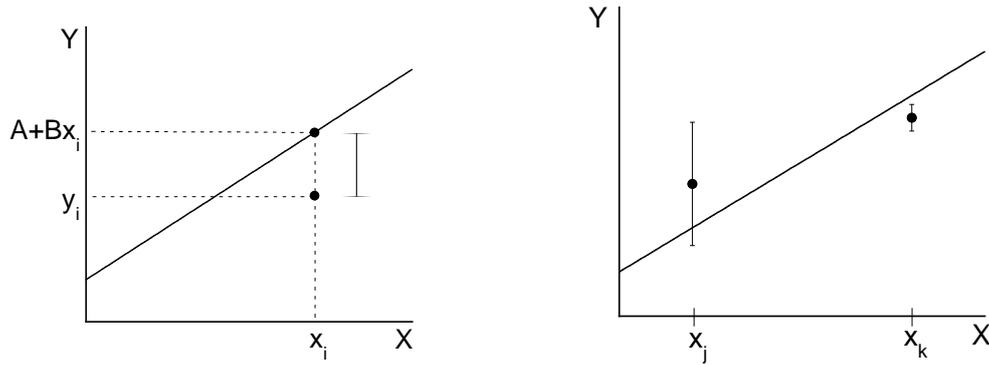


Figura 4.15: A sinistra: discrepanza tra i valori in ordinata del punto e della retta in corrispondenza dell'ascissa x_i . A destra: la discrepanza assoluta è maggiore per il punto di ascissa x_j che per il punto di ascissa x_k ; la discrepanza commisurata all'incertezza è invece minore per il punto di ascissa x_j che per il punto di ascissa x_k .

La sommatoria viene convenzionalmente indicata con il simbolo χ^2 (leggi *chi quadrato*), cioè con il quadrato della lettera greca χ (nomi e simboli di tutte le lettere dell'alfabeto greco sono riportate nella prima tabella dell'Appendice D). Poichè i valori $x_i, y_i, \delta y_i$ sono noti, la grandezza χ^2 è funzione solo delle due variabili A e B . Si tratta quindi di determinare analiticamente i valori di A e B che rendono minima la grandezza χ^2 .

Affrontiamo prima un caso particolare, quello della **diretta proporzionalità**

$$Y = BX. \quad (4.7.7)$$

In questo caso la discrepanza globale tra retta e punti sperimentali è misurata dalla sommatoria:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{[y_i - Bx_i]^2}{(\delta y_i)^2} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} w_i [y_i - Bx_i]^2. \quad (4.7.8)$$

La grandezza χ^2 è funzione della sola variabile B . Condizione necessaria affinché χ^2 sia minimo è che sia nulla la derivata prima rispetto a B :

$$\frac{d\chi^2}{dB} = 0. \quad (4.7.9)$$

È facile verificare che l'eq. (4.7.9) è soddisfatta per

$$B = \frac{\sum_i w_i x_i y_i}{\sum_i w_i x_i^2} \quad (4.7.10)$$

e che il valore B così determinato individua un punto di minimo, e non di massimo o di flesso. Se le incertezze δy_i sono tutte uguali, e quindi sono uguali i pesi w_i , l'eq. (4.7.10) si semplifica in

$$B = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2}. \quad (4.7.11)$$

Torniamo ora al **caso generale della linearità**

$$Y = A + BX. \quad (4.7.12)$$

La grandezza χ^2 , eq. (4.7.6), è ora funzione di *due variabili*, A e B . Condizione necessaria perché χ^2 sia minimo è che siano nulle le sue *derivate parziali prime* rispetto ad A e B :

$$y = \begin{cases} \frac{\partial \chi^2}{\partial A} = 0 \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial B} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\sum_i w_i x_i) A + (\sum_i w_i x_i^2) B = \sum_i w_i x_i y_i \\ (\sum_i w_i x_i) A + (\sum_i w_i x_i^2) B = \sum_i w_i x_i y_i \end{cases} \quad (4.7.13)$$

Si ottiene così un sistema di due equazioni lineari nelle due incognite A e B , la cui soluzione dà

$$A = \frac{(\sum_i w_i x_i^2)(\sum_i w_i y_i) - (\sum_i w_i x_i)(\sum_i w_i x_i y_i)}{\Delta_w} \quad (4.7.14)$$

$$B = \frac{(\sum_i w_i)(\sum_i w_i x_i y_i) - (\sum_i w_i y_i)(\sum_i w_i x_i)}{\Delta_w} \quad (4.7.15)$$

$$\text{dove } \Delta_w = \left(\sum_i w_i\right) \left(\sum_i w_i x_i^2\right) - \left(\sum_i w_i x_i\right)^2. \quad (4.7.16)$$

È facile rendersi conto che i valori A e B così determinati individuano un minimo di χ^2 .

Nel caso in cui le incertezze sulle misure di Y siano tutte uguali, il peso $w_i = w$ può essere semplificato nelle eq. (4.7.14–16) e si ottengono le relazioni

$$A = \frac{(\sum_i x_i^2)(\sum_i y_i) - (\sum_i x_i)(\sum_i x_i y_i)}{\Delta} \quad (4.7.17)$$

$$B = \frac{N(\sum_i x_i y_i) - (\sum_i y_i)(\sum_i x_i)}{\Delta} \quad (4.7.18)$$

$$\text{dove } \Delta = N \left(\sum_i x_i^2\right) - \left(\sum_i x_i\right)^2 \quad (4.7.19)$$

Nota: Una giustificazione più approfondita della procedura di regressione lineare basata sul metodo dei minimi quadrati verrà fornita al § 7.5.

Vediamo ora come è possibile tener conto, nella procedura di regressione lineare, delle eventuali **incertezze δx_i sulla grandezza X in ascissa**. Allo scopo, si può procedere come segue.

- Si determinano valori approssimati A' e B' dei parametri della retta, utilizzando il metodo grafico descritto al § 4.7.2 oppure le eq. (4.7.17–19).
- Si trasformano le incertezze δX_{exp} della grandezza X in contributi δY_{tra} alle incertezze sulla grandezza Y utilizzando le procedure di propagazione descritte al § 4.6.2. Si ottiene così, per ogni punto,

$$\delta Y_{\text{tra}} = |B| \delta X_{\text{exp}}. \quad (4.7.20)$$

- Per ogni punto, si sommano quadraticamente i due contributi all'incertezza su Y , quello sperimentale e quello trasferito da X :

$$(\delta Y_{\text{tot}})^2 = (\delta Y_{\text{exp}})^2 + (\delta Y_{\text{tra}})^2. \quad (4.7.21)$$

4.7.4 Incertezza sui parametri della regressione lineare

I parametri A e B della retta ottenuti mediante la procedura di regressione lineare dipendono dai valori x_i, y_i delle coordinate dei punti sperimentali. Poiché i valori y_i sono affetti da incertezze δy_i , ci si aspetta che le incertezze δy_i si riflettano in incertezze δA e δB sui parametri A e B della retta.

Per valutare le incertezze δA e δB ci serviremo delle regole per la propagazione dell'incertezza introdotte al § 4.6.

Consideriamo dapprima il caso più semplice della **diretta proporzionalità** $Y = BX$. L'eq. (4.7.10) mostra che il parametro B è una combinazione lineare dei valori y_i , del tipo dell'eq. (4.6.1):

$$B = \sum_i \beta_i y_i \quad \text{con } \beta_i = \frac{w_i x_i}{\sum_i w_i x_i^2}. \quad (4.7.22)$$

Possiamo pertanto applicare la regola di propagazione espressa dall'eq. (4.6.6), ricordando che $(\delta y_i)^2 = 1/w_i$:

$$(\delta B)^2 = \sum_i \beta_i^2 (\delta y_i)^2 = \frac{\sum_i w_i^2 x_i^2 / w_i}{(\sum_i w_i x_i^2)^2} = \frac{1}{\sum_i w_i x_i^2}. \quad (4.7.23)$$

Se le incertezze δy_i sono tutte uguali, l'eq. (4.7.23) si riduce a

$$(\delta B)^2 = \frac{1}{\sum_i x_i^2} (\delta y)^2. \quad (4.7.24)$$

Passiamo ora al **caso generale della linearità**. Entrambi i parametri A e B , espressi dalle eq. (4.7.14–16), sono combinazioni lineari dei valori y_i , del tipo dell'eq. (4.6.1):

$$A = \sum_i \alpha_i y_i, \quad \text{con } \alpha_i = \frac{w_i(\sum_i w_i x_i^2) - w_i x_i (\sum_i w_i x_i)}{\Delta_w} \quad (4.7.25)$$

$$B = \sum_i \beta_i y_i, \quad \text{con } \beta_i = \frac{w_i x_i (\sum_i w_i) - w_i (\sum_i w_i x_i)}{\Delta_w} \quad (4.7.26)$$

Possiamo ancora applicare la regola di propagazione espressa dall'eq. (4.6.6), ricordando sempre che $(\delta y_i)^2 = 1/w_i$ e tenendo conto che Δ_w è dato dall'eq. (4.7.16). Con un po' di pazienza si può verificare che

$$(\delta A)^2 = \sum_i \alpha_i^2 (\delta y_i)^2 = \frac{\sum_i w_i x_i^2}{\Delta_w}, \quad (\delta B)^2 = \sum_i \beta_i^2 (\delta y_i)^2 = \frac{\sum_i w_i}{\Delta_w}. \quad (4.7.27)$$

Se le incertezze δy_i sono tutte uguali, le eq. (4.7.27) si riducono a

$$(\delta A)^2 = \frac{\sum_i x_i^2}{\Delta} (\delta y)^2, \quad (\delta B)^2 = \frac{\mathcal{N}}{\Delta} (\delta y)^2, \quad (4.7.28)$$

con Δ espresso dall'eq. (4.7.19).

4.7.5 Linearizzazione grafica di relazioni non lineari

Riconoscere che \mathcal{N} punti sperimentali (x_i, y_i) sono disposti approssimativamente lungo una retta è relativamente semplice. Come abbiamo visto al precedente § 4.7.4, è facile poi determinare i parametri della retta mediante la procedura di regressione lineare.

Riconoscere relazioni funzionali diverse dalla linearità è invece generalmente molto difficile. Si pensi, ad esempio, alla difficoltà di distinguere un andamento parabolico $Y = \alpha X^2$ da un andamento cubico $Y = \beta Y^3$.

Il problema può spesso venire risolto mediante opportune trasformazioni degli assi del grafico, che consentano di ricondurre un generico andamento $Y = f(X)$ ad una retta $Y = A + BX$, alla quale è poi possibile applicare la regressione lineare.

Ad esempio, un andamento parabolico $Y = \alpha X^2$ può essere trasformato in un andamento lineare rappresentando i valori Y in funzione di $Z = X^2$ anziché di X .

Procedure molto efficaci di linearizzazione si basano sull'uso di grafici logaritmici, per i quali si rimanda al § A.3.

4.7.6 Test del chi-quadrato

La linearità della relazione tra due variabili X e Y viene generalmente valutata in prima approssimazione mediante osservazione diretta del grafico. Una volta determinati i parametri A e B della retta attraverso la procedura di regressione lineare, è possibile cercare di valutare in modo quantitativo il grado di affidabilità dell'ipotesi di linearità.

Punto di partenza del metodo che si utilizza generalmente per questo scopo è l'espressione della discrepanza globale tra retta e punti sperimentali, introdotta dall'eq. (4.7.6) e indicata con χ^2 . Per questa ragione, il metodo si chiama *test del chi quadrato*.

Il test del chi quadrato riveste un'importanza molto importante nella trattazione statistica avanzata dei dati sperimentali, ben al di là del presente caso della regressione lineare. Ce ne occuperemo pertanto in modo approfondito e generalizzato più avanti, nel § 7.6. In questo paragrafo, ci limiteremo ad un'introduzione semplificata e qualitativa ai suoi aspetti più semplici.

Per comprendere la filosofia che sta alla base del test del chi quadrato, è utile partire da un'ipotesi puramente astratta: supponiamo cioè di sapere *a priori* che le grandezze X e Y sono sicuramente legate dalla relazione lineare $Y = A + BX$. Eseguiamo ora un esperimento, consistente nella misurazione di \mathcal{N} coppie di punti $(x_i, y_i \pm \delta y_i)$. Naturalmente, poiché le misure sono affette da incertezza, non ci si aspetta che i punti sperimentali stiano esattamente sulla retta teorica $Y = A + BX$. Se però le incertezze δy_i dei singoli punti sono state valutate correttamente, ci si può ragionevolmente aspettare che la discrepanza tra teoria ed esperimento per ogni punto sia, in media, confrontabile con l'incertezza. Detto altrimenti, ogni termine della sommatoria nell'eq. (4.7.6) dovrebbe essere in media dell'ordine dell'unità, e quindi $\chi^2 \simeq \mathcal{N}$.

In realtà, l'aspettativa $\chi^2 \simeq \mathcal{N}$ è ragionevole se gli \mathcal{N} termini della sommatoria sono tra di loro indipendenti: sarebbe il caso, ad esempio, del confronto tra \mathcal{N} punti sperimentali e una retta $Y = A + BX$ determinata dalla teoria in modo completamente indipendente. Nel caso della regressione lineare, invece, i due parametri A e B della retta sono determinati a partire dai punti sperimentali, cosicché non tutti i termini della sommatoria sono tra di loro indipendenti.

Esempio 1: Nel caso della diretta proporzionalità $Y = BX$, se ci fosse un solo punto sperimentale (x_1, y_1) , e quindi $\mathcal{N} = 1$, la retta determinata dalla regressione lineare passerebbe esattamente per il punto (x_1, y_1) , qualunque fosse la sua incertezza δy_1 .

Esempio 2: Nel caso della relazione lineare $A + BX$, se ci fossero solo due punti sperimentali (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , e quindi $\mathcal{N} = 2$, la retta determinata dalla regressione lineare passerebbe esattamente per entrambi i punti, qualunque fossero le loro incertezze δy_1 e δy_2 .

È ragionevole pertanto aspettarsi, nel caso della diretta proporzionalità $Y = BX$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{[y_i - Bx_i]^2}{(\delta y_i)^2} \simeq \mathcal{N} - 1, \quad (4.7.29)$$

e nel caso generale della linearità $Y = A + BX$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{[y_i - A - Bx_i]^2}{(\delta y_i)^2} \simeq \mathcal{N} - 2. \quad (4.7.30)$$

È bene cercare di chiarire meglio il significato del segno \simeq delle eq. (4.7.29) e (4.7.30). La discrepanza tra punti sperimentali e retta teorica ha carattere aleatorio, cioè probabilistico. Anche il valore del χ^2 è pertanto aleatorio: i valori $\mathcal{N} - 1$ e $\mathcal{N} - 2$ rappresentano solo le medie delle rispettive distribuzioni probabilistiche del χ^2 . Uno studio più approfondito consentirà, al § 7.6, di definire le proprietà della distribuzione del χ^2 . Per il momento ci limitiamo ad anticipare alcune conclusioni approssimate.

Nel caso della diretta proporzionalità $Y = BX$, l'Eq. (4.7.29) equivale a dire che è molto probabile che

$$\mathcal{N} - 1 - \sqrt{2\mathcal{N} - 2} \leq \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{[y_i - Bx_i]^2}{(\delta y_i)^2} \leq \mathcal{N} - 1 + \sqrt{2\mathcal{N} - 2}, \quad (4.7.31)$$

mentre, nel caso generale della linearità $Y = A + BX$, l'Eq. (4.7.30) equivale a dire che è molto probabile che

$$\mathcal{N} - 2 - \sqrt{2\mathcal{N} - 4} \leq \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{[y_i - A - Bx_i]^2}{(\delta y_i)^2} \leq \mathcal{N} - 2 + \sqrt{2\mathcal{N} - 4}. \quad (4.7.32)$$

Torniamo ora al problema di partenza. Vogliamo cioè valutare se l'ipotesi di linearità sia accettabile, a partire dai valori sperimentalmente ottenuti per il χ^2 . Le Eq. (4.7.29) e (4.7.30), o meglio le Eq. (4.7.31) e (4.7.32), costituiscono dei criteri di natura probabilistica, da utilizzare comunque con cautela. Per fissare le idee, consideriamo il caso generale $Y = A + BX$.

- a) Se $\chi^2 \simeq \mathcal{N} - 2$ e se le incertezze δy_i sono state valutate correttamente, allora è plausibile ritenere che la retta $Y = A + BX$ sia compatibile con i punti sperimentali.

- b) Se $\chi^2 \ll \mathcal{N} - 2$ è ancora plausibile ritenere la retta $Y = A + BX$ compatibile con i punti sperimentali; è però anche probabile che le incertezze δy_i siano state mediamente sopravvalutate (ad esempio perché si è sovrastimata la possibile influenza di errori sistematici).
- c) Se $\chi^2 \gg \mathcal{N} - 2$ è plausibile concludere che la retta $Y = A + BX$ non è compatibile con i punti sperimentali; può tuttavia sorgere anche il dubbio che si siano invece sottovalutate le incertezze δy_i . Affronteremo questo problema nel seguente § 4.7.7.

4.7.7 Valutazione a posteriori dell'incertezza di misura

Può succedere che l'incertezza δy_i sui singoli valori della grandezza Y sia stata sottostimata. Ad esempio:

- a) ogni valore y_i rappresenta una singola misura, anziché la media su più misure ripetute; l'incertezza δy_i dipende solo dalla risoluzione, e non può tener conto dell'influenza degli errori casuali;
- b) non si è tenuta in debito conto l'incertezza dovuta all'influenza di errori sistematici non compensati.

In tali casi, se si è convinti della bontà dell'ipotesi di linearità $Y = A + BX$ (in base ad esempio a considerazioni di natura teorica o all'esito di altri esperimenti), è possibile ribaltare la formula (4.7.30) del χ^2 per valutare *a posteriori* l'incertezza media δy sui punti sperimentali, imponendo che $\chi^2 = \mathcal{N} - 2$:

$$(\delta y)^2 \simeq \frac{1}{\mathcal{N} - 2} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} [y_i - A - Bx_i]^2 \quad (4.7.33)$$

Analoga procedura può essere seguita con l'Eq. (4.7.29) nel caso della diretta proporzionalità.

Parte II

Probabilità e statistica

Nella Parte ?? sono stati richiamati i Principi della Termodinamica seguendo il tradizionale approccio basato sullo studio delle trasformazioni cicliche.

In questa Parte ?? affronteremo lo studio della Termodinamica macroscopica dell'equilibrio da un punto di vista più generale, basato sul formalismo delle coordinate sviluppato da J. W. Gibbs a fine Ottocento.

La trattazione sarà basata su un approccio assiomatico relativamente recente, sviluppato da L. Tisza e H. B. Callen, che consente una formulazione matematicamente elegante e facilmente adattabile ai diversi campi di applicazione della Termodinamica.

Verranno introdotte le funzioni termodinamiche entalpia, energia libera di Helmholtz ed energia libera di Gibbs e discusse le condizioni di equilibrio dei sistemi termodinamici. Saranno introdotte le funzioni risposta e dedotte le relazioni analitiche che le collegano.

Questa Parte ?? si concluderà con lo studio di alcuni processi termodinamici particolarmente importanti e con un'introduzione alla termodinamica chimica.

Capitolo 5

Probabilità: concetti elementari

Come abbiamo visto nel precedente Capitolo 4, l'espressione della misura di una grandezza fisica deve sempre comprendere una stima dell'incertezza. L'incertezza è legata alla larghezza della distribuzione probabilistica dei possibili valori, ad esempio una distribuzione normale, oppure a rettangolo, oppure a triangolo, etc.

In questo Capitolo 5 studieremo alcune nozioni di base del calcolo delle probabilità, che utilizzeremo poi al Capitolo 6 per affrontare in modo più approfondito il problema delle distribuzioni di variabile aleatoria. Le tecniche probabilistiche e statistiche rivestono un ruolo importante in molti campi della Fisica, non solo per quanto riguarda l'espressione dell'incertezza di misura, e pertanto affronteremo l'argomento da un punto di vista generale. I concetti introdotti nei Capitoli 5 e 6 saranno poi utilizzati nel Capitolo 7 per giustificare criticamente ed eventualmente ampliare e approfondire i metodi di elaborazione dei dati sperimentali introdotti al Capitolo 4.

5.1 Fenomeni aleatori

La dispersione casuale dei risultati delle misurazioni ripetute di una grandezza fisica (§ 4.3) fornisce un esempio tipico di **fenomeno aleatorio**.

In generale diremo che un fenomeno è **aleatorio** (o *casuale*, ingl. *random*) se, riprodotto più volte nelle medesime condizioni iniziali, si svolge sempre in modo diverso, con esito comunque imprevedibile.

Esempio: La traiettoria di un dado lanciato sempre nello stesso modo è un fenomeno aleatorio, e l'esito del lancio è imprevedibile. (La parola stessa *aleatorio* deriva dal latino *alea* = dado.)

In molti fenomeni fisici è possibile individuare alcune caratteristiche essenziali, suscettibili di una descrizione di tipo deterministico: note le condizioni iniziali, lo svolgimento e l'esito finale del fenomeno possono essere in linea di principio previsti dalle leggi della Fisica. Esistono sempre però anche fattori secondari che non è possibile (o conveniente) trattare in modo deterministico, ed assumono pertanto carattere aleatorio; la loro influenza può da caso a caso essere più o meno grande ma non è comunque completamente eliminabile.

Esempio: La traiettoria di un proiettile, noti la velocità iniziale v_0 , l'angolo di tiro θ e l'accelerazione di gravità g , è prevista in modo deterministico dalle leggi della meccanica; ad esempio, la gittata è $s = v_0^2 \sin 2\theta / g$. Una traiettoria reale sarà però di volta in volta diversa da quella teorica per l'influenza casuale di fattori secondari (vibrazioni, condizioni meteorologiche, errori di puntamento, etc.).

Esempio: La misurazione di una grandezza fisica (ad esempio il periodo di oscillazione di un pendolo o la temperatura di una massa d'acqua) è un processo in larga misura deterministico. Non è però possibile eliminare completamente l'influenza di fattori aleatori (i cosiddetti *errori casuali*), per cui il risultato della misurazione non è mai un valore numerico ben definito, bensì un intervallo di valori.

Esistono fenomeni per i quali una trattazione di natura deterministica non è comunque possibile; in alcuni casi ciò è dovuto alla complessità del sistema fisico che si vuole studiare; in altri casi (tipicamente nella Fisica atomica e sub-atomica) il fenomeno stesso ha una natura genuinamente aleatoria.

Esempio: In un volume di gas in equilibrio la traiettoria di ogni molecola è, in linea di principio, descrivibile mediante le leggi della meccanica. Il numero estremamente grande di molecole in gioco (tipicamente dell'ordine di 10^{23}) rende però impossibile una descrizione deterministica globale del loro comportamento. È più proficuo considerare il comportamento di ogni molecola come del tutto casuale.

Esempio: Il decadimento di un atomo radioattivo è un fenomeno genuinamente aleatorio, che non può essere previsto deterministicamente.

Esistono infine fenomeni che vengono volutamente realizzati in modo da assumere caratteristiche esclusivamente aleatorie.

Esempio: I giochi d'azzardo si basano tipicamente sulla capacità di realizzare alcuni fenomeni (lancio di dadi, estrazione di carte, etc.) in modo da rendere impossibile la prevedibilità deterministica del loro esito.

Esempio: Lo studio di sistemi fisici complessi si giova talvolta di metodi basati sulla simulazione al computer del loro comportamento. Alcuni di questi metodi di simulazione hanno come presupposto la completa aleatorietà delle scelte elementari compiute ad ogni passo dal computer.

L'imprevedibilità, la complessità, l'elevato numero di cause che intervengono nei fenomeni aleatori rendono necessari metodi speciali per il loro studio: questi metodi vengono elaborati dalla **statistica** e dalla **teoria delle probabilità**.

La possibilità di usare metodi matematici rigorosi quali quelli sviluppati dalla teoria delle probabilità nella trattazione dei fenomeni aleatori si basa sulla seguente evidenza sperimentale, ormai ben consolidata. L'esito di un singolo fenomeno aleatorio è per sua natura completamente imprevedibile; se il fenomeno viene più volte ripetuto avremo una distribuzione casuale di esiti; al crescere del numero di ripetizioni del fenomeno la distribuzione degli esiti tende però ad assumere delle caratteristiche sempre più nette e dei valori sempre più stabili delle sue proprietà medie.

Esempio: Il lancio di una moneta è un fenomeno aleatorio: il risultato (testa o croce) è di volta in volta imprevedibile; pure, al crescere del numero di lanci, la frequenza di comparizione di "testa" tende a stabilizzarsi sempre più nettamente intorno al valore $1/2$.

Esempio: In un volume di gas in equilibrio gli urti delle molecole sulle pareti del recipiente sono distribuiti casualmente nel tempo. Però, se il numero di molecole è sufficientemente grande, il loro effetto si manifesta come una pressione costante e uniforme.

Esempio: Il decadimento di un singolo atomo radioattivo è un fenomeno genuinamente aleatorio. Se però consideriamo un insieme molto grande di atomi radioattivi (tipicamente dell'ordine di 10^{23}) la sequenza temporale dei loro decadimenti è caratterizzata da un ben definito andamento esponenziale.

Esempio: La singola misurazione di una grandezza fisica affetta da errori casuali dà un valore aleatorio. Se però la misurazione viene ripetuta un numero sufficiente di volte, la distribuzione delle misure tende ad assumere una forma ben definita, sintetizzabile in due parametri numerici, il valore medio e lo scarto quadratico medio.

5.2 Spazio campionario. Eventi.

Un fenomeno aleatorio può avere diversi **esiti**.

Esempio: Il lancio di un dado può avere 6 esiti: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Esempio: Se lanciamo due volte una moneta possiamo avere 4 esiti: TT, TC, CT, CC (T = testa, C = croce).

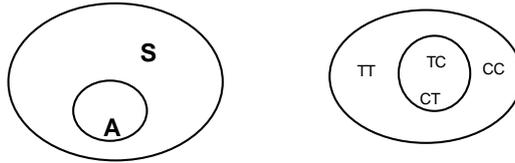


Figura 5.1: A sinistra: un evento A è un sottoinsieme dello spazio campionario S . A destra: spazio campionario per il lancio doppio di una moneta; l'evento $A =$ “esce testa una volta”.

Si chiama **spazio campionario** l'insieme S che ha come elementi tutti i possibili esiti di un fenomeno aleatorio. Lo spazio campionario S può avere un numero finito, infinito numerabile, infinito non numerabile di elementi.

Esempio: Per il lancio di un dado lo spazio campionario è l'insieme $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, che ha un numero finito di elementi.

Esempio: Per il lancio triplo di una moneta lo spazio campionario è $S = \{TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CCT, CTC, CCC\}$ con un numero finito di elementi.

Esempio: Un esperimento consiste nel lanciare ripetutamente una moneta finché non esce per la prima volta “testa”.

I possibili esiti costituiscono lo spazio campionario $S = \{T, CT, CCT, CCCT, CCCCT, \dots\}$, che può essere posto in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri naturali $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ed ha quindi un numero infinito numerabile di elementi.

Esempio: La rottura del filamento di una comune lampadina ad incandescenza è un fenomeno aleatorio. Lo spazio campionario S è costituito da tutti i possibili valori del tempo di funzionamento $\Delta t \geq 0$. Lo spazio campionario ha in questo caso un numero infinito non numerabile di elementi.

Si chiama **evento** un qualsiasi sottoinsieme A dello spazio campionario S : un evento è cioè un insieme di possibili esiti (Fig. 5.1). L'evento A è realizzato se si realizza uno degli esiti che gli appartengono. (I singoli esiti sono talora chiamati anche *eventi elementari*.)

Esempio: Una moneta viene lanciata due volte; lo spazio campionario è $S = \{TT, TC, CT, CC\}$. L'evento “esce testa una volta” è il sottoinsieme $A = \{TC, CT\}$ (Fig. 5.1).

Esempio: Un dado viene lanciato 10 volte. Un esito del fenomeno è una ben definita sequenza di 10 numeri, ciascuno compreso tra 1 e 6. Esistono 6^{10} possibili sequenze distinte, pertanto lo spazio campionario S ha 6^{10} elementi. Un possibile evento è “il 6 compare 5 volte”. Un altro evento è “il 6 compare 3 volte”. Un altro è “il 3 compare 2 volte e il 2 compare 4 volte”. Un altro è “il 4 compare 3 volte consecutive”.

Esempio: Si consideri la durata di un insieme di 1000 lampadine. Lo spazio campionario S è costituito dal prodotto degli spazi campionari relativi alle singole lampadine: ogni suo elemento è costituito da 1000 valori di durata delle 1000 lampadine. Un possibile evento è “100 lampadine durano più di 4000 ore”. Un altro è “nessuna lampadina si rompe prima di 10 ore”. Un altro: “20 lampadine si rompono entro 10 ore”.

Per qualsiasi fenomeno aleatorio è conveniente mettere in evidenza due eventi particolari:

- **evento certo:** $A = S$ (A coincide con lo spazio campionario)
- **evento impossibile:** $A = \emptyset$ (A è l'insieme vuoto)

Esempio: Un dado viene lanciato una volta. È certo l'evento “esce un numero compreso tra 1 e 6”. È impossibile l'evento “esce il numero 8”.

5.3 Probabilità di un evento

L'esito di un singolo fenomeno aleatorio non può essere previsto in modo deterministico. È tuttavia normale, in base all'esperienza, attendersi che eventi diversi si realizzino con maggiore o minore facilità.

Esempio: Se lanciamo 10 volte una moneta, ci aspettiamo che l'evento "escono 6 croci e 4 teste" si realizzi più facilmente che non l'evento "escono 10 teste".

Per esprimere in modo quantitativo tale "facilità di realizzazione", si associa ad ogni evento un numero reale \mathcal{P} , chiamato **probabilità dell'evento**. Per convenzione si pone:

- per l'evento certo: $\mathcal{P} = 1$;
- per l'evento impossibile: $\mathcal{P} = 0$.

La probabilità di un evento è perciò un numero compreso tra 0 e 1 ($0 \leq \mathcal{P} \leq 1$). Intuitivamente, quanto più grande è l'attesa di realizzazione di un evento, tanto più \mathcal{P} è vicino a 1.

Nota 1: La possibilità di attribuire ad ogni evento un valore di probabilità è intuitiva se gli eventi costituiscono un insieme discreto; se invece gli eventi costituiscono un insieme continuo è necessario un approccio meno immediato, che affronteremo in dettaglio al Cap. 6.

Nota 2: Se un evento è impossibile, la sua probabilità è $\mathcal{P} = 0$ per definizione. Non vale però il contrario: un evento che abbia probabilità $\mathcal{P} = 0$ non è necessariamente impossibile: è il caso, ad esempio, di eventi che costituiscono un insieme continuo, che affronteremo al Cap. 6 (vedi nota precedente).

Come si fa ad attribuire ad ogni evento aleatorio discreto un numero compreso tra 0 ed 1 che ne rappresenti la *probabilità* \mathcal{P} ?

In questo paragrafo considereremo alcuni metodi frequentemente utilizzati per valutare la probabilità \mathcal{P} di un evento. A queste regole empiriche si attribuisce di solito, seppure impropriamente, il nome di *definizioni*.

Una volta valutate le probabilità di eventi semplici, è possibile calcolare le probabilità di eventi più complessi utilizzando i metodi sviluppati dalla teoria delle probabilità. La teoria delle probabilità è una teoria formale, basata su una *definizione assiomatica* di probabilità, che introdurremo al § 5.5.3.

5.3.1 Definizione classica (a priori)

Storicamente la prima definizione di probabilità, detta *definizione classica*, fu introdotta da P.S. Laplace (1749–1828). Secondo la definizione classica, la probabilità di un evento A è valutata *a priori*, vale a dire senza la necessità di eseguire esperimenti, come il rapporto tra il numero di esiti che realizzano l'evento A e il numero totale di esiti dello spazio campionario S.

$$\mathcal{P}(A) = \frac{\text{numero di esiti favorevoli}}{\text{numero di esiti possibili}} = \frac{m}{M} \quad (5.3.1)$$

Esempio: Viene lanciato un dado: la probabilità che compaia il 3 è $\mathcal{P} = 1/6$. Ci sono infatti $M=6$ esiti possibili, di cui solo $m=1$ favorevole.

Esempio: Un'urna contiene 5 palline, 2 bianche e 3 nere. Viene estratta una pallina a caso: la probabilità che sia bianca è $\mathcal{P} = 2/5$. Ci sono infatti $M=5$ esiti possibili, di cui $m=2$ favorevoli.

La definizione classica richiede che siano verificate le seguenti condizioni:

1. dei possibili esiti se ne realizza sempre uno e uno solo per volta;
2. gli esiti possibili sono equiprobabili (principio di *indifferenza*: non c'è motivo di ritenere un particolare esito privilegiato rispetto a qualsiasi altro).

La definizione classica può quindi essere utilizzata solo se è possibile considerare soddisfatte a priori queste due condizioni, in base ad esempio a considerazioni di simmetria. Molti problemi di

interesse pratico, in particolare nel campo delle scienze naturali, non si prestano all'applicazione della definizione classica. È inoltre da notare che la seconda condizione (equiprobabilità degli esiti possibili) implica una forma di circolarità nella definizione classica.

- (?) Vengono lanciati contemporaneamente 2 dadi. Si costruisca lo spazio campionario. Si verifichi che la probabilità che la somma dei 2 numeri sia 7 è $\mathcal{P}(7) = 1/6$, che sia 5 è $\mathcal{P}(5) = 1/9$.
- (?) Si estraggono due carte da un mazzo di 40 carte. Si calcoli il numero totale di esiti possibili. Si verifichi che la probabilità che le due carte estratte siano due assi è $\mathcal{P} = 1/130$. Si verifichi che la probabilità che una sola delle due carte sia un asso è $\mathcal{P} = 12/65$.

5.3.2 Definizione statistica (a posteriori)

Una definizione alternativa a quella classica, con un campo di applicabilità più vasto, si basa sul concetto di *frequenza statistica*.

Se vengono eseguite N esperienze, e un evento A si verifica in n^* delle N esperienze ($n^* \leq N$), si chiama **frequenza statistica** dell'evento A relativa alle N esperienze il rapporto:

$$p^*(A) = n^*/N. \quad (5.3.2)$$

La frequenza statistica p^* ha carattere aleatorio. Ripetendo più volte l'insieme delle N esperienze si otterranno di volta in volta e in modo imprevedibile valori diversi della frequenza statistica p^* .

Esempio: Una moneta viene lanciata 100 volte: la frequenza statistica del risultato *testa* è $p_1^* = 45/100$; viene lanciata altre 100 volte: questa volta la frequenza statistica è $p_2^* = 52/100$; viene lanciata altre 100 volte, ...

Esempio: Le lampadine prodotte da una fabbrica vengono controllate prima di essere poste in commercio. Di un primo campione di $N=1000$, $n^*=2$ sono difettose; la frequenza statistica è $p_1^* = 2/1000$. Di un secondo campione di $N=1000$, $n^*=8$ sono difettose; la frequenza statistica è ora $p_2^* = 8/1000$.

L'esperienza mostra che le fluttuazioni aleatorie della frequenza p^* per diversi insiemi di N esperienze tendono a ridursi al crescere del numero N . In altri termini, quando il numero N di esperienze cresce, la frequenza statistica di un determinato evento tende a stabilizzarsi.

In base a queste considerazioni, la probabilità di un evento A è stata definita da R. von Mises (1883–1953), a partire dalla frequenza statistica, come:

$$\mathcal{P}(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} p^*(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n^*}{N}. \quad (5.3.3)$$

Il limite che appare nell'Eq. (5.3.3) è diverso da quello ben noto dell'analisi; il suo significato è quello di "convergenza in probabilità": $n^*/N \rightarrow \mathcal{P}$ per $N \rightarrow \infty$, se per ogni $\epsilon > 0$ la probabilità che $|n^*/N - \mathcal{P}| < \epsilon$ tende a 1 per $N \rightarrow \infty$. (In altri termini, per qualsiasi valore di N non sono impossibili, seppure improbabili, fluttuazioni maggiori di ϵ rispetto al valore \mathcal{P}).

Nei casi in cui è possibile applicare anche la definizione classica, si verifica sperimentalmente che la frequenza statistica p^* di un evento converge verso il valore di probabilità previsto dalla definizione classica.

In ogni caso, la definizione di probabilità data dall'Eq. (5.3.3) non è operativa, perché sperimentalmente N non può che essere finito. Nella pratica si cerca di rendere N quanto più grande possibile, e quindi si fa l'assegnazione approssimata $\mathcal{P} = p^*$.

Si noti inoltre che il concetto di convergenza in probabilità implica una forma di circolarità anche per la definizione statistica.

5.3.3 Definizione soggettiva

Entrambe le definizioni introdotte sopra, classica e statistica, presentano incongruenze logiche e difficoltà di applicazione.

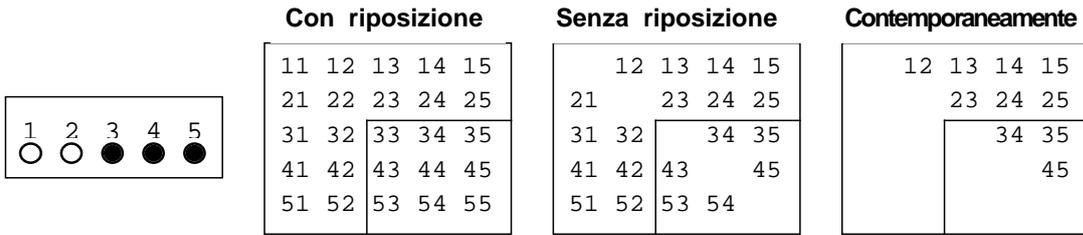


Figura 5.2: Illustrazione dell'esempio 2. L'urna con le 5 palline e i 3 spazi campionari relativi alle tre ipotesi a, b, c.

Un tentativo di superarle è costituito dalla *definizione soggettiva* (F.P. Ramsay, 1903–1930; B. de Finetti, 1906–1985), secondo la quale la probabilità misura il grado di fiducia sentito da un individuo nell'avverarsi di un dato evento. Ovviamente alla valutazione soggettiva del valore da attribuire a \mathcal{P} contribuiranno, seppure in modo non deterministico, le considerazioni e le osservazioni empiriche che formano la base delle definizioni classica e statistica.

Esempio: Un individuo attribuisce all'esito "5" nel lancio di un dado probabilità $\mathcal{P} = 1/6$ in base a considerazioni sulla simmetria del dado e all'esperienza acquisita in precedenti lanci ripetuti. L'individuo si aspetta che in un numero elevato di lanci successivi la frequenza di comparsa del "5" si approssimi a $1/6$.

5.3.4 Esempi

Facciamo alcuni esempi.

Esempio 1: In un paese ci sono $M=2000$ abitanti, di cui $m_1=500$ di età inferiore a 20 anni, $m_2=1100$ di età compresa tra 20 e 60 anni, $m_3=400$ di età superiore a 60 anni. Un nominativo viene estratto a sorte dall'elenco anagrafico: vogliamo calcolare la probabilità che corrisponda ad un individuo di età inferiore a 20 anni. Possiamo utilizzare la definizione classica, in quanto gli esiti elementari sono equivalenti e mutuamente esclusivi. Si ottiene $\mathcal{P} = m_1/M=500/2000=1/4$.

Esempio 2: Un'urna contiene 2 palline bianche e 3 nere. Vengono estratte a caso 2 palline. Vogliamo valutare la probabilità che entrambe siano nere. Consideriamo separatamente tre ipotesi:

- la prima pallina viene riposta nell'urna prima dell'estrazione della seconda;
- le due palline vengono estratte in sequenza, senza riposizione;
- le due palline vengono estratte contemporaneamente.

Per ognuna delle tre ipotesi possiamo costruire lo spazio campionario (Fig. 5.2) e quindi applicare la definizione classica. La probabilità che le due palline siano nere è:

- $\mathcal{P}=9/25$ nella prima ipotesi (estrazione in sequenza con riposizione)
- $\mathcal{P}=3/10$ nella seconda ipotesi (estrazione in sequenza senza riposizione)
- $\mathcal{P}=3/10$ nella terza ipotesi (estrazione contemporanea).

Esempio 3: Il signor Bianchi e il signor Rossi vogliono incontrarsi sulla piazza della loro città tra le ore 11 e le ore 12. Ognuno dei due arriverà casualmente in piazza in un istante compreso tra le 11 e le 12, ed aspetterà non più di 20 minuti. Qual è la probabilità che i due si incontrino? In questo caso lo spazio campionario S ha come elementi tutte le possibili coppie di istanti di arrivo di Bianchi e Rossi (t_B, t_R) ; l'evento considerato A è il sottoinsieme costituito dalle coppie per le quali $|t_B - t_R| \leq 20$ minuti. Entrambi gli insiemi S e A hanno un numero infinito non numerabile di elementi. È possibile ugualmente calcolare la probabilità di incontro secondo la definizione classica usando un argomento geometrico. Si considera il piano cartesiano che ha in ascissa l'istante di arrivo di Bianchi, in ordinata l'istante di arrivo di Rossi (Fig. 5.3). Lo spazio campionario S è rappresentato dal quadrato di lato 60 minuti, l'evento A dalla zona rappresentata in grigio in figura. La probabilità di incontro è data dal rapporto tra le due aree: $\mathcal{P} = 5/9$.

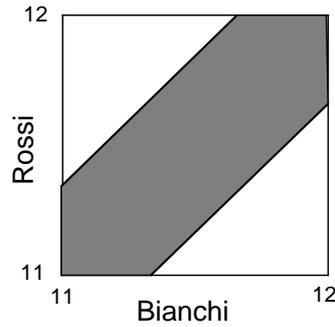


Figura 5.3: Illustrazione dell'Esempio 3. In ascissa l'ora d'arrivo di Bianchi, in ordinata l'ora d'arrivo di Rossi.

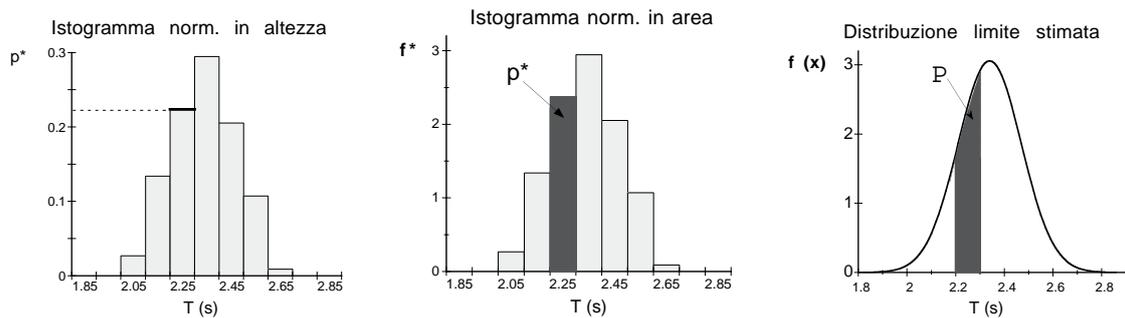


Figura 5.4: Illustrazione dell'esempio 4. A sinistra un istogramma sperimentale normalizzato in altezza: l'altezza di ogni colonnina dà direttamente la frequenza statistica. Al centro lo stesso istogramma, normalizzato però in area: la frequenza statistica è ora data dall'area della colonnina. A destra la distribuzione limite normale con media m e varianza σ^2 stimate a partire dai corrispondenti parametri dell'istogramma (vedi § 4.3, eq. 4.3.14 e 4.3.15); la probabilità è data dall'area sottesa dalla distribuzione.

Esempio 4: Il periodo di oscillazione di un pendolo viene misurato N volte. I risultati sono riportati in un istogramma con colonnine di larghezza $\Delta T=0.1$ s (Fig. 5.4 a sinistra e al centro). Vogliamo valutare la probabilità che il risultato di una singola ulteriore misurazione cada nell'intervallo tra i valori 2.2 e 2.3 s. In questo caso non è possibile applicare la definizione classica; ricorriamo perciò alla definizione statistica. L'istogramma sperimentale ci fornisce la frequenza statistica $p^*=0.223$ con cui sono comparsi i valori compresi tra 2.2 e 2.3 s nell'insieme delle N misure. Per calcolare la probabilità usando la definizione statistica poniamo: $\mathcal{P} = p^*=0.223$. Una valutazione più accurata della probabilità si può fare se si ipotizza che la distribuzione limite abbia forma normale (Fig. 5.4 a destra); possiamo stimare valor medio m e scarto quadratico medio σ della distribuzione normale a partire dai valori sperimentali (§ 4.3). La probabilità \mathcal{P} è l'area sottesa dalla distribuzione normale in corrispondenza dell'intervallo tra 2.2 e 2.3 s; in questo caso $\mathcal{P}=0.241$. L'ipotesi che la distribuzione limite sia normale si basa in parte su elementi di valutazione soggettivi. Il corrispondente calcolo della probabilità può quindi essere ricondotto alla definizione soggettiva.

Esempio 5: Nel rapporto di un laboratorio di analisi, l'effetto degli errori sistematici sul risultato della misurazione di una grandezza fisica viene quotato asserendo semplicemente che la misura è compresa tra i valori X_{\min} e X_{\max} ; non vengono date ulteriori informazioni sulla forma della distribuzione dei valori X . Un utilizzatore del rapporto ritiene plausibile assumere che tutti i valori compresi nell'intervallo tra X_{\min} e X_{\max} siano equiprobabili. Questo è un tipico esempio di applicazione della definizione soggettiva di probabilità alle componenti di incertezza

di Categoria B, cioè valutate con metodi non statistici (§ 4.5).

5.4 Addizione e moltiplicazione di eventi

5.4.1 Evento somma

Consideriamo due eventi qualsiasi A e B . Un terzo evento C è detto **somma degli eventi** A e B se C è realizzato ogniqualvolta è realizzato A oppure B .

Riferendoci allo spazio campionario S , C è il sottoinsieme di S che ha come elementi sia gli elementi di A che gli elementi di B . In termini insiemistici, C è la riunione di A e di B (Fig. 5.5 a,b):

$$C = A + B \quad \text{oppure} \quad C = A \cup B. \quad (5.4.1)$$

In modo analogo si definisce la somma di più eventi:

$$C = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n \quad (5.4.2)$$

Esempio: Si estrae una carta da un mazzo di 52 carte. Se A = “esce una carta di cuori”, B = “esce una carta di quadri”, allora $C = A + B$ = “esce una carta di seme rosso”.

Esempio: Si analizza la vita di un componente elettronico prodotto in serie. Se A = “il componente dura da 500 a 2000 ore” e B = “il componente dura da 1000 a 4000 ore”, allora $C = A + B$ = “il componente dura da 500 a 4000 ore”.

5.4.2 Evento prodotto

Consideriamo due eventi qualsiasi A e B . Un terzo evento C è detto **prodotto degli eventi** A e B se C è realizzato quando sono realizzati sia A che B .

Riferendoci allo spazio campionario S , C è il sottoinsieme di S che ha come elementi gli elementi comuni ad A e B . In termini insiemistici, C è l'intersezione di A e B (Fig. 5.5 c):

$$C = A \cdot B \quad \text{oppure} \quad C = A \cap B. \quad (5.4.3)$$

In modo analogo si definisce il prodotto di più eventi

$$C = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n. \quad (5.4.4)$$

Esempio: Si estrae una carta da un mazzo di 52 carte. Se A = “esce una carta di cuori” e B = “esce una figura”, allora $C = A \cdot B$ = “esce una figura di cuori”.

Esempio: Vengono lanciati due dadi. Lo spazio campionario S è costituito da 36 esiti (coppie di numeri). L'evento A = “la somma dei dadi è 8” è costituito da 5 esiti. L'evento B = “escono due numeri pari” è costituito da 9 esiti. L'evento $C = A \cdot B$ = “escono due numeri pari la cui somma è 8” è costituito da 3 esiti.

5.4.3 Eventi incompatibili

Due eventi A e B sono detti **incompatibili** se non possono realizzarsi contemporaneamente.

In termini insiemistici due eventi A e B sono incompatibili se la loro intersezione è l'insieme vuoto:

$$A \cap B = \emptyset. \quad (5.4.5)$$

Esempio: Si estrae una carta da un mazzo di 52 carte. L'evento A = “esce una carta di quadri” e l'evento B = “esce una carta di seme nero” sono incompatibili.

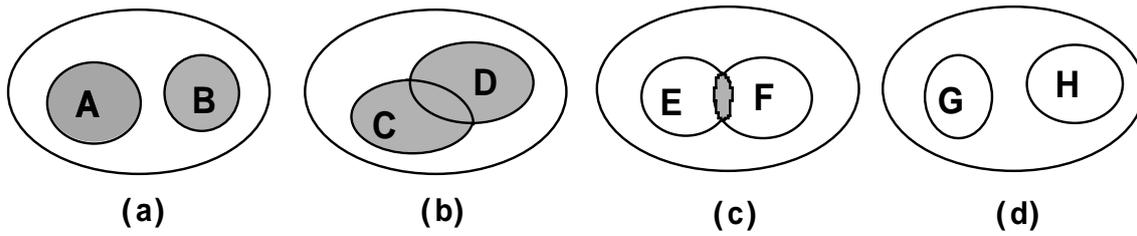


Figura 5.5: In (a) e (b) l'area grigia rappresenta la somma dei due eventi A e B oppure C e D . In (c) l'area grigia rappresenta il prodotto di E e F . In (d) gli eventi G e H sono incompatibili e il loro prodotto è nullo.

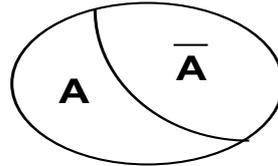


Figura 5.6: Eventi complementari.

5.4.4 Evento complementare

Un evento \bar{A} è detto **complementare** di un evento A , quando \bar{A} si realizza se e solo se non si realizza A .

In termini insiemistici (Fig. 5.6):

$$A \cap \bar{A} = \emptyset; \quad A \cup \bar{A} = S. \quad (5.4.6)$$

Esempio: Si lancia un dado. Se A = “esce un numero pari”, allora \bar{A} = “esce un numero dispari”.

Esempio: Si considera la vita media di una lampadina. Se A = “la lampadina si guasta entro 400 ore”, allora \bar{A} = “la lampadina dura almeno 400 ore”.

5.4.5 Eventi complessi

Le operazioni di addizione e moltiplicazione di eventi e il concetto di eventi complementari consentono di esprimere eventi complessi in termini di somme e prodotti di eventi più semplici.

Esempio: Si sparano 3 colpi su un bersaglio. Ogni colpo può andare a segno oppure no indipendentemente dall'esito degli altri. Indicando con s il colpo s -mo andato a segno, con \bar{s} il colpo s -mo fallito ($s=1,2,3$), si può costruire uno spazio campionario S :

$$S = \{123, 12\bar{3}, 1\bar{2}3, \bar{1}23, 1\bar{2}\bar{3}, \bar{1}\bar{2}3, \bar{1}2\bar{3}, \bar{1}\bar{2}\bar{3}\}.$$

L'utilità dello spazio campionario S è limitata, in quanto i suoi elementi non sono in genere equiprobabili. È più conveniente considerare separatamente ogni tiro, indicando con A_s l'evento semplice “tiro s -mo andato a segno”, con \bar{A}_s l'evento complementare “tiro s -mo fallito”. L'evento B = “solo uno dei tre colpi va a segno” può ad esempio essere decomposto in termini di somme e prodotti di eventi più semplici:

$$B = A_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot A_2 \cdot \bar{A}_3 + \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot A_3.$$

Come vedremo nei prossimi paragrafi, la teoria delle probabilità stabilisce le regole per calcolare la probabilità di eventi complessi a partire dalle probabilità di eventi più semplici.

5.5 Probabilità della somma di eventi

Vogliamo affrontare per primo il seguente problema: nota la probabilità di realizzazione di due eventi A e B , come si calcola la probabilità di realizzazione dell'evento somma $A + B$?

5.5.1 Somma di eventi incompatibili

Se i due eventi A e B sono tra di loro incompatibili ($A \cap B = \emptyset$), la probabilità dell'evento somma $A + B$ è la somma delle probabilità dei singoli eventi A, B (Fig. 5.7 a):

$$\mathcal{P}(A + B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) \quad (5.5.1)$$

L'eq. (5.5.1) può essere facilmente ricondotta alla definizione classica di probabilità, eq. (5.3.1):

$$\mathcal{P}(A) = \frac{m_A}{M}; \quad \mathcal{P}(B) = \frac{m_B}{M} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}(A + B) = \frac{m_A + m_B}{M}.$$

Nei casi in cui non è possibile applicare la definizione classica, l'eq. (5.5.1) viene considerata comunque valida, facendone un postulato della *definizione assiomatica* di probabilità (vedi più sotto).

È ovvia la generalizzazione dell'eq. (5.5.1) al caso di somma di più eventi incompatibili:

$$\mathcal{P}(A + B + C + \dots + Z) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) + \dots + \mathcal{P}(Z). \quad (5.5.2)$$

È pure ovvio che, indicando con \bar{A} l'evento complementare di A , si ha

$$\mathcal{P}(\bar{A}) + \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(\bar{A} + A) = 1; \quad \mathcal{P}(\bar{A}) = 1 - \mathcal{P}(A). \quad (5.5.3)$$

Esempio: Vengono venduti mille biglietti di una lotteria. Uno vincerà 1000 euro, 10 vinceranno 100 euro, 50 vinceranno 50 euro, 100 vinceranno 10 euro. Le probabilità di vincere: A_1 (1000 euro), A_2 (100 euro), A_3 (50 euro), A_4 (10 euro) sono, rispettivamente, 0.001, 0.01, 0.05, 0.1. La probabilità di vincere più di 10 euro è

$$\mathcal{P}(A_1 + A_2 + A_3) = \mathcal{P}(A_1) + \mathcal{P}(A_2) + \mathcal{P}(A_3) = 0.061$$

Esempio: La probabilità che una lampadina si rompa entro la millesima ora di funzionamento è $\mathcal{P}(A_1) = 0.20$; tra la millesima e la duemillesima è $\mathcal{P}(A_2) = 0.25$. La probabilità che la lampadina duri più di 2000 ore è

$$\mathcal{P}(\bar{A}) = 1 - \mathcal{P}(A) = 1 - \mathcal{P}(A_1 + A_2) = 1 - \mathcal{P}(A_1) - \mathcal{P}(A_2) = 0.55$$

5.5.2 Somma di eventi compatibili

Se i due eventi possono realizzarsi contemporaneamente (cioè $A \cap B \neq \emptyset$), la probabilità della loro somma non è più espressa dall'eq. (5.5.1), bensì (Fig. 5.7 b) dalla formula più generale:

$$\mathcal{P}(A + B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) - \mathcal{P}(A \cdot B). \quad (5.5.4)$$

Nel caso di 3 eventi compatibili A, B, C (Fig. 5.7 c) la probabilità della somma è:

$$\mathcal{P}(A + B + C) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) + \mathcal{P}(C) - \mathcal{P}(A \cdot B) - \mathcal{P}(A \cdot C) - \mathcal{P}(B \cdot C) + \mathcal{P}(A \cdot B \cdot C). \quad (5.5.5)$$

E così via.

Impareremo al prossimo § 5.6 a calcolare la probabilità del prodotto di due o più eventi, $\mathcal{P}(A \cdot B), \mathcal{P}(A \cdot B \cdot C), \dots$

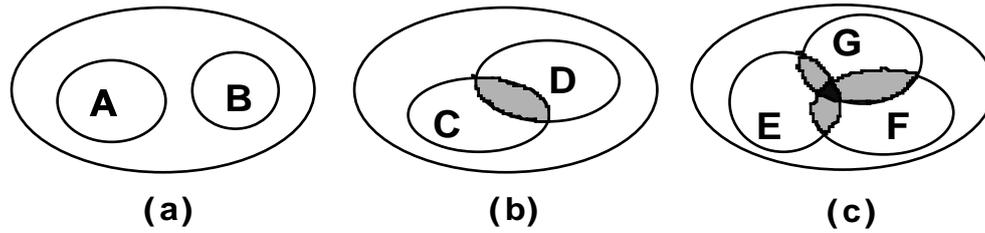


Figura 5.7: In (a) gli eventi A e B sono incompatibili: $\mathcal{P}(A+B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B)$. In (b) gli eventi C e D sono compatibili; sommando semplicemente le probabilità $\mathcal{P}(C)$ e $\mathcal{P}(D)$ l'area grigia viene contata due volte. In (c) sommando semplicemente le probabilità $\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{P}(F)$ e $\mathcal{P}(G)$ l'area grigia viene contata due volte, l'area nera tre volte.

5.5.3 Definizione assiomatica di probabilità

Nelle trattazioni assiomatiche della teoria delle probabilità, la probabilità viene definita come un numero reale \mathcal{P} che soddisfa i seguenti assiomi:

- a) per ogni evento A , $\mathcal{P}(A) \geq 0$;
- b) per l'evento certo S , $\mathcal{P}(S) = 1$;
- c) per ogni coppia A, B di eventi incompatibili,

$$\mathcal{P}(A+B) = \mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B).$$

In base a questi assiomi vengono dimostrati i teoremi che consentono di calcolare le probabilità di eventi complessi a partire dalle probabilità di eventi più semplici.

Le probabilità degli eventi più semplici dovranno comunque essere valutate mediante le definizioni empiriche del § 5.3, e saranno considerate come ipotesi di partenza.

5.6 Probabilità del prodotto di eventi

Affrontiamo ora il seguente problema: nota la probabilità di realizzazione di due eventi A e B , come si calcola la probabilità di realizzazione del loro prodotto AB ? (Per semplificare la notazione, d'ora in poi indicheremo il prodotto tra due eventi A e B con AB anziché $A \cdot B$).

Affinché si realizzi il prodotto AB , è necessario che si realizzino sia A sia B . Prima di calcolare la probabilità del prodotto, è pertanto necessario verificare se la realizzazione di uno dei due eventi, ad esempio A , modifica (*condiziona*) la probabilità di realizzazione dell'altro evento, ad esempio B .

5.6.1 Probabilità condizionata

Si chiama *probabilità condizionata* di un evento B rispetto ad un evento A , e si indica con $\mathcal{P}(B|A)$, la probabilità dell'evento B sotto la condizione che l'evento A si sia realizzato.

La probabilità condizionata di B rispetto ad A si calcola considerando come spazio campionario dell'evento B l'insieme dei soli esiti che soddisfano l'evento A .

Esempio 1: Consideriamo il lancio di un dado e fissiamoci sui due eventi:

A = "esce un numero pari"

B = "esce un numero minore di 6"

Fissando l'attenzione sullo spazio campionario (Fig. 5.8) è facile calcolare separatamente la probabilità dei due eventi: $\mathcal{P}(A) = 1/2$ e $\mathcal{P}(B) = 5/6$,

nonché la probabilità del prodotto: $\mathcal{P}(AB) = 1/3$.

Invece la probabilità condizionata di A nell'ipotesi che B sia realizzato è $\mathcal{P}(A|B) = 2/5$, mentre la probabilità condizionata di B nell'ipotesi che A sia realizzato è $\mathcal{P}(B|A) = 2/3$.

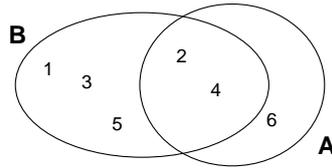


Figura 5.8: Illustrazione dell'Esempio 1.

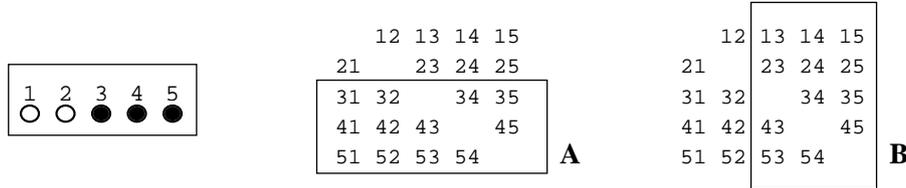


Figura 5.9: Illustrazione dell'esempio 2. A sinistra la scatola con le 5 palline. Al centro e a destra lo spazio campionario: i riquadri rappresentano i sottospazi dell'evento A e dell'evento B.

Esempio 2: Riprendiamo l'esempio 2 del § 5.3.4: un'urna contiene 2 palline bianche e 3 nere; vengono estratte a caso due palline senza riposizione. Fissiamo l'attenzione sui due eventi:
 A = "la prima pallina estratta è nera"
 B = "la seconda pallina estratta è nera"
 Se costruiamo lo spazio campionario per l'estrazione senza riposizione e consideriamo separatamente i due eventi, si ha che $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B) = 3/5$ (Fig. 5.9).
 La probabilità condizionata di B nell'ipotesi che A sia realizzato è $\mathcal{P}(B|A) = 1/2$; anche la probabilità condizionata di A nell'ipotesi che B sia realizzato è $\mathcal{P}(A|B) = 1/2$.

I due esempi rappresentano una verifica pratica delle relazioni generali per la probabilità condizionata:

$$\mathcal{P}(A|B) = \mathcal{P}(AB)/\mathcal{P}(B); \quad \mathcal{P}(B|A) = \mathcal{P}(AB)/\mathcal{P}(A). \tag{5.6.0}$$

5.6.2 Probabilità del prodotto

Invertendo le relazioni dell'eq. (5.6.0), si vede che la probabilità $\mathcal{P}(AB)$ del prodotto di 2 eventi A e B è data dal prodotto della probabilità di un evento per la probabilità condizionata dell'altro evento:

$$\mathcal{P}(AB) = \mathcal{P}(A) \mathcal{P}(B|A) = \mathcal{P}(B) \mathcal{P}(A|B) \tag{5.6.1}$$

Esempio 1: Riprendiamo l'esempio precedente del lancio di un dado e dei due eventi
 A = "esce un numero pari"
 B = "esce un numero minore di 6"
 La probabilità del prodotto AB = "esce un numero pari minore di 6" è data da

$$\mathcal{P}(AB) = \mathcal{P}(A) \mathcal{P}(B|A) = \mathcal{P}(B) \mathcal{P}(A|B) = 1/3.$$

Questo risultato può essere verificato analizzando direttamente lo spazio campionario.

Esempio 2: Riprendiamo l'esempio precedente dell'estrazione senza riposizione di due palline da un'urna e dei due eventi
 A = "la prima pallina estratta è nera"
 B = "la seconda pallina estratta è nera"
 La probabilità del prodotto AB = "entrambe le palline estratte sono nere" è data da

$$\mathcal{P}(AB) = \mathcal{P}(A) \mathcal{P}(B|A) = \mathcal{P}(B) \mathcal{P}(A|B) = 3/10.$$

Anche questo risultato può essere verificato analizzando direttamente lo spazio campionario.

Nel caso di più eventi A_1, A_2, A_3, \dots , la probabilità del prodotto è

$$\mathcal{P}(A_1 A_2 \dots A_n) = \mathcal{P}(A_1) \mathcal{P}(A_2|A_1) \mathcal{P}(A_3|A_2 A_1) \dots \mathcal{P}(A_n|A_1 A_2 A_3 \dots A_{n-1}). \quad (5.6.2)$$

Esempio: Si estraggono 5 carte da un mazzo di 52 carte. Indichiamo con A_i l'evento "la i -ma carta è di picche". La probabilità che le 5 carte siano di picche è

$$\mathcal{P}(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5) = (13/52) (12/51) (11/50) (10/49) (9/48) = 4.9 \times 10^{-4}.$$

5.6.3 Eventi indipendenti

Un evento B è detto **indipendente** dall'evento A se la probabilità di realizzazione di B non dipende dal fatto che A si sia realizzato oppure no. Se B è indipendente da A , anche A è indipendente da B .

Esempio 1: Un dado viene lanciato 2 volte. La probabilità che un uno dei due lanci esca un dato numero (evento A) è indipendente dall'esito dell'altro lancio (evento B).

Esempio 2: Si estrae una carta da un mazzo di 52 carte. La probabilità che sia un asso (evento B) è indipendente dal fatto che sia una carta di cuori (evento A).

Esempio 3: Si estraggono 2 carte da un mazzo di 52 carte. La probabilità che la seconda carta estratta sia un asso (evento B) è diversa a seconda che la prima carta fosse un asso (evento A) oppure no (evento \bar{A}). L'evento A e l'evento B non sono indipendenti.

Esempio 4: Un'urna contiene 2 palline bianche e 3 nere. Si estraggono 2 palline. Evento A = "la prima pallina è nera". Evento B = "la seconda pallina è nera". Se, prima di estrarre la seconda, la prima pallina viene rimessa nella scatola, gli eventi A e B sono indipendenti. Se invece la prima pallina resta fuori della scatola, gli eventi A e B non sono indipendenti.

Generalizzando quest'ultimo esempio, le estrazioni di due o più oggetti da un insieme (carte da un mazzo, palline da un'urna, etc) possono essere fatte reinserendo di volta in volta l'oggetto estratto nell'insieme prima di estrarre il successivo (*estrazioni con riposizione*) oppure non riponendo l'oggetto estratto (*estrazioni senza riposizione*). Le estrazioni *con* e *senza* riposizione forniscono esempi rispettivamente di eventi indipendenti e dipendenti.

Per **eventi indipendenti** la probabilità condizionata si riduce alla probabilità semplice

$$\mathcal{P}(A|B) = \mathcal{P}(A); \quad \mathcal{P}(B|A) = \mathcal{P}(B), \quad (5.6.3)$$

e l'eq. (5.6.1) che esprime la **probabilità del prodotto** si riduce a

$$P(AB) = P(A) P(B). \quad (5.6.4)$$

Esempio: Riprendendo l'esempio dell'urna con 2 palline bianche e 3 nere, la probabilità di estrarre 2 palline nere è $\mathcal{P}(AB) = \mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B) = (3/5)(3/5) = 9/25$ oppure $\mathcal{P}(AB) = \mathcal{P}(A)\mathcal{P}(B|A) = (3/5)(2/4) = 3/10$ a seconda che la prima pallina venga oppure no rimessa nella scatola.

Esempio: Due carte sono estratte da un mazzo di 52 carte. La probabilità che entrambe siano assi è $\mathcal{P}(AB) = \mathcal{P}(A) \mathcal{P}(B) = (4/52)(4/52) = 1/169$ oppure $\mathcal{P}(AB) = \mathcal{P}(A) \mathcal{P}(B|A) = (4/52)(3/51) = 1/221$ a seconda che la prima carta venga oppure no rimessa nel mazzo.

Esempio: Un dado viene lanciato 2 volte; trovare la probabilità dell'evento B = "il 4 esce almeno una volta". B è la somma di due eventi: A_1 = "il 4 esce al primo lancio"; A_2 = "il 4 esce al secondo lancio". I due eventi A_1, A_2 non sono incompatibili, perciò

$$\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A_1 + A_2) = \mathcal{P}(A_1) + \mathcal{P}(A_2) - \mathcal{P}(A_1 A_2).$$

I due eventi A_1, A_2 sono indipendenti, perciò

$$\mathcal{P}(A_1 A_2) = \mathcal{P}(A_1) \mathcal{P}(A_2).$$

Quindi

$$\mathcal{P}(B) = (1/6) + (1/6) - (1/6) \cdot (1/6) = 11/36.$$

5.7 Tecniche di calcolo combinatorio

Il calcolo delle probabilità di eventi complessi a partire dalle probabilità di eventi semplici può essere molto facilitato dall'uso di alcune tecniche di *calcolo combinatorio* che verranno illustrate in questo paragrafo.

5.7.1 Disposizioni

Sia dato un insieme di n oggetti. In quanti modi distinti è possibile estrarre k oggetti dall'insieme di n oggetti? Ovvero, quante sono le *disposizioni di n oggetti a k a k* (o della classe k) $D_{n,k}$?

Esempio: Si abbiano a disposizione $n=3$ oggetti: A, B, C. In quanti modi distinti si possono realizzare gruppi di $k=2$ oggetti? Ci sono 6 modi: AB, AC, BC, BA, CA, CB. Pertanto le disposizioni sono $D_{3,2} = 6$.

Si noti che le disposizioni contano come distinti gruppi di oggetti che differiscono solo per l'ordine, ad esempio AB e BA .

Cerchiamo una formula generale per le disposizioni $D_{n,k}$. Consideriamo un insieme di n oggetti. Ci sono:

n	modi distinti di scegliere il 1° oggetto,
$n-1$	modi distinti di scegliere il 2° oggetto,
...	
$(n-k+1)$	modi distinti di scegliere il k -mo oggetto.

Pertanto

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1). \quad (5.7.1)$$

Utilizzando la notazione fattoriale

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1; \quad 0! = 1$$

e moltiplicando il secondo membro dell'eq. (5.7.1) per la frazione $(n-k)!/(n-k)! = 1$ si ottiene la notazione più sintetica:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (5.7.2)$$

5.7.2 Permutazioni

Le *permutazioni* P_n di n oggetti sono i modi distinti in cui è possibile ordinare n oggetti. Le permutazioni sono un caso particolare di disposizioni:

$$P_n = D_{n,n} = n! \quad (5.7.3)$$

Esempio: Un gruppo di 7 persone ha a disposizione 7 sedie allineate. Le 7 persone possono disporsi sulle sedie in $P_7 = 7! = 5040$ modi distinti.

Esempio: Una classe di 30 studenti viene divisa, durante le sessioni di laboratorio, in 10 gruppi di 3 studenti ciascuno. Vogliamo calcolare in quanti modi distinti può essere realizzata la ripartizione in gruppi. Le possibili permutazioni dei 30 studenti sono $P_{30} = 30!$. Per ogni gruppo tuttavia $3!$ permutazioni sono equivalenti. Pertanto le possibili ripartizioni sono

$$\frac{30!}{3!3! \dots 3!} = \frac{30!}{(3!)^{10}} \simeq 4 \times 10^{24}.$$

5.7.3 Combinazioni

Sia dato ancora un insieme di n oggetti.

In quanti modi è possibile estrarre k oggetti dall'insieme di n oggetti, considerando questa volta equivalenti i gruppi di k oggetti che differiscono solo per l'ordine degli oggetti stessi (ad esempio $AB \equiv BA$) ?

Le combinazioni di n oggetti a k a k (o della classe k) $C_{n,k}$ si ottengono dividendo le disposizioni $D_{n,k}$ dell'eq. (5.7.2) per le permutazioni P_k dell'eq. (5.7.3):

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)! k!} = \binom{n}{k} \quad (5.7.4)$$

Il simbolo $\binom{n}{k}$ che compare all'ultimo membro si legge *n sopra k* (e non *n su k*!).

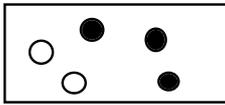
La differenza tra disposizioni e combinazioni è evidente nel caso notevole $k = n$. In questo caso le disposizioni sono $D_{n,n} = n!$ mentre le combinazioni sono $C_{n,n} = 1$.

Esempio: Consideriamo 10 punti A, B, C, ... L complanari, a tre a tre non allineati.

- Quante linee rette vengono determinate dai 10 punti ? $\binom{10}{2} = 45$.
- Quante di tali rette non passano per A o B ? $\binom{8}{2} = 28$.
- Quanti triangoli hanno per vertici 3 dei 10 punti? $\binom{10}{3} = 120$.
- Quanti di tali triangoli hanno A come vertice? $\binom{9}{2} = 36$.
- Quanti di tali triangoli hanno AB come lato? 8.

Vediamo ora due esempi di applicazione delle tecniche combinatorie al calcolo delle probabilità secondo la definizione classica.

Esempio: Riprendiamo ancora l'esempio dell'estrazione senza riposizione di 2 palline da un'urna contenente 2 palline bianche e 3 nere. La probabilità dell'evento C ="entrambe le palline sono nere" è stata in precedenza calcolata sia costruendo lo spazio campionario e applicando la definizione classica di probabilità (al § ??), sia decomponendo l'evento C nel prodotto di due eventi più semplici ed applicando le regole sulla probabilità del prodotto (al § 5.6).



Calcoliamo ora la probabilità dell'evento C secondo la definizione classica senza costruire lo spazio campionario, bensì utilizzando le tecniche combinatorie per calcolare il numero totale di esiti e il numero di esiti favorevoli:

$$\mathcal{P}(C) = \frac{\text{n}^\circ \text{ di esiti favorevoli}}{\text{n}^\circ \text{ totale di esiti}} = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}.$$

Esempio: Un dado viene lanciato 5 volte. Trovare la probabilità dell'evento A ="il 6 compare 3 volte". Ci sono $\binom{5}{3} = \binom{5}{2}$ combinazioni di modi in cui il 6 può comparire 3 volte in 5 lanci. Ogni combinazione corrisponde ad un diverso evento B_i , per cui l'evento A può essere decomposto nella somma di $\binom{5}{3}$ eventi incompatibili B_i . Ogni evento B_i è a sua volta il prodotto di 5 eventi indipendenti, ciascuno corrispondente ad un lancio del dado; la sua probabilità è perciò il prodotto delle probabilità dei singoli lanci:

$$\mathcal{P}(B_i) = \frac{1}{6} \frac{1}{6} \frac{1}{6} \frac{5}{6} \frac{5}{6}.$$

La probabilità dell'evento A è la somma delle probabilità dei $\binom{5}{3}$ eventi B_i :

$$\mathcal{P}(A) = \sum \mathcal{P}_i = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{125}{3888}$$

5.7.4 Formula del binomio di Newton

Un'applicazione importante del calcolo combinatorio si ha nel calcolo della potenza n -ma di un binomio, $(a+b)^n$:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\dots(a+b)}_{n \text{ fattori}} = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k}b^k \quad (5.7.5)$$

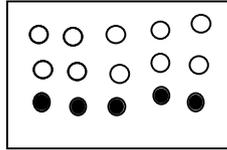
Si ricordi che $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ e che $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$.

Con riferimento all'eq. (5.7.5) le espressioni $\binom{n}{k}$ vengono chiamate *coefficienti binomiali*.

5.8 Problemi e applicazioni

5.8.1 Problema 1

Una scatola contiene 10 palline bianche e 5 nere. Vengono estratte a caso 4 palline. Vogliamo determinare la probabilità $\mathcal{P}(A)$ dell'evento A ="almeno una delle palline estratte è nera". Studiamo due possibili soluzioni del problema.



Soluzione 1

L'evento A può essere decomposto nella somma di 4 eventi incompatibili: $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$, dove A_i ="sono estratte i palline nere". Pertanto $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A_1) + \mathcal{P}(A_2) + \mathcal{P}(A_3) + \mathcal{P}(A_4)$. A sua volta, ognuno degli eventi A_i può essere espresso in $\binom{4}{i}$ modi come prodotto di 4 eventi *non* indipendenti, per cui, utilizzando l'eq. (5.6.2),

$$\mathcal{P}(A_1) = \binom{4}{1} \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} \cdot \frac{9}{13} \cdot \frac{8}{12}, \quad \mathcal{P}(A_2) = \binom{4}{2} \frac{5}{15} \cdot \frac{4}{14} \cdot \frac{10}{13} \cdot \frac{9}{12}, \quad \dots$$

Il calcolo completo di $\mathcal{P}(A)$ è piuttosto laborioso. Cerchiamo una soluzione alternativa più veloce.

Soluzione 2

Calcoliamo la probabilità dell'evento complementare \bar{A} ="nessuna pallina estratta è nera". Si può esprimere \bar{A} come prodotto $\bar{A} = B_1B_2B_3B_4$, dove B_i ="l' i -ma pallina estratta è bianca". Applicando il teorema del prodotto, eq. (5.6.2),

$$\mathcal{P}(\bar{A}) = \mathcal{P}(B_1) \cdot \mathcal{P}(B_2|B_1) \cdot \mathcal{P}(B_3|B_1B_2) \cdot \mathcal{P}(B_4|B_1B_2B_3) = \frac{10}{15} \frac{9}{14} \frac{8}{13} \frac{7}{12} = \frac{2}{13}$$

per cui $\mathcal{P}(A) = 1 - \mathcal{P}(\bar{A}) = 11/13$.

5.8.2 Problema 2

Una moneta viene lanciata 6 volte. Vogliamo determinare la probabilità $\mathcal{P}(A)$ dell'evento A ="Testa esce più spesso di Croce". Anche in questo caso studiamo due differenti soluzioni.

Soluzione 1

L'evento A è somma di 3 eventi incompatibili:

$$A = A_0 + A_1 + A_2 = (0 \text{ Croci}) + (1 \text{ Croce}) + (2 \text{ Croci}),$$

ognuno dei quali è a sua volta scomponibile come somma di $\binom{6}{i}$ prodotti di 6 eventi indipendenti

$$A_i = \binom{6}{i} B_1B_2B_3B_4B_5B_6.$$

L'evento B_j corrisponde al j -mo lancio, con probabilità $1/2$ per entrambi i possibili esiti (Testa o Croce), per cui

$$\mathcal{P}(A_0) = \left(\frac{1}{2}\right)^6; \quad \mathcal{P}(A_1) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \binom{6}{1}; \quad \mathcal{P}(A_2) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \binom{6}{2}$$

e infine $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(A_0) + \mathcal{P}(A_1) + \mathcal{P}(A_2) = 11/32$.

Soluzione 2

Una soluzione più veloce è basata su argomenti di simmetria. Consideriamo i tre eventi incompatibili:

A = "Testa esce più spesso di Croce"

B = "Escono 3 Teste e 3 Croci"

C = "Croce esce più spesso di Testa"

Per simmetria $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(C)$; inoltre $\mathcal{P}(A) + \mathcal{P}(B) + \mathcal{P}(C) = 1$. Pertanto $\mathcal{P}(A) = [1 - \mathcal{P}(B)]/2$. Poiché

$$\mathcal{P}(B) = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \binom{6}{3} = \frac{10}{32},$$

si ritrova il risultato $\mathcal{P}(A) = 11/32$.

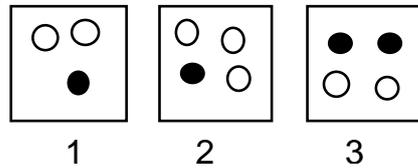
5.8.3 Formula delle probabilità totali

Supponiamo di avere 3 scatole:

la scatola 1 contiene 2 palline bianche e 1 nera;

la scatola 2 contiene 3 palline bianche e 1 nera;

la scatola 3 contiene 2 palline bianche e 2 nere.



Si sceglie a caso una delle 3 scatole (evento H_i , con $i = 1, 2, 3$). Dalla scatola scelta si estrae, sempre a caso, una pallina. Si vuole determinare la probabilità dell'evento A = "la pallina estratta è bianca".

Osserviamo che l'evento A è la somma di tre eventi incompatibili, ciascuno dei quali a sua volta è il prodotto di due eventi non indipendenti:

$$A = H_1A + H_2A + H_3A,$$

per cui la probabilità dell'evento A è

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(H_1) \cdot \mathcal{P}(A|H_1) + \mathcal{P}(H_2) \cdot \mathcal{P}(A|H_2) + \mathcal{P}(H_3) \cdot \mathcal{P}(A|H_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{23}{36} = 0.639$$

(?) Si verifichi che la probabilità di estrarre una pallina bianca da una sola scatola contenente 7 palline bianche e 4 nere sarebbe molto simile, $\mathcal{P}(A') = 0.636$.

Ripetiamo ora l'esperimento supponendo che le tre scatole abbiano un contenuto sensibilmente diverso, ad esempio:

la scatola 1 contenga 2 palline bianche e 1 nera;

la scatola 2 contenga 2 palline bianche e 1 nera;

la scatola 3 contenga 2 palline bianche e 16 nere.

In questo caso

$$\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(H_1) \cdot \mathcal{P}(A|H_1) + \mathcal{P}(H_2) \cdot \mathcal{P}(A|H_2) + \mathcal{P}(H_3) \cdot \mathcal{P}(A|H_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{18} = \frac{13}{27} = 0.481$$

(?) Si verifichi che la probabilità di estrarre una pallina bianca da una sola scatola contenente 6 palline bianche e 18 nere sarebbe molto diversa, $\mathcal{P}(A')=0.25$.

Generalizzando, supponiamo che un evento A possa realizzarsi in concomitanza con la realizzazione di uno qualsiasi di N eventi incompatibili H_i ($i = 1 \dots N$), detti *ipotesi*. La probabilità di realizzazione dell'evento A può essere espressa come

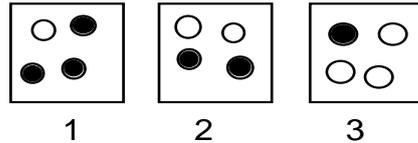
$$\mathcal{P}(A) = \sum_{i=1}^N \mathcal{P}(H_i) \cdot \mathcal{P}(A|H_i). \quad (5.8.1)$$

L'eq. (5.8.1) è detta *formula delle probabilità totali*.

5.8.4 Teorema di Bayes

Supponiamo ancora di avere 3 scatole:

- 1) la scatola 1 contiene 1 pallina bianca e 3 nere;
- 2) la scatola 2 contiene 2 palline bianche e 2 nere;
- 3) la scatola 3 contiene 3 palline bianche e 1 nera.



Le 3 scatole sono esternamente indistinguibili.

Si sceglie a caso una scatola (evento H_i) e se ne estrae, sempre a caso, una pallina. La pallina estratta è bianca (evento A).

Vogliamo determinare la probabilità che la scatola prescelta fosse la i -ma, una volta noto che la pallina estratta è bianca. In altre parole, vogliamo determinare la probabilità condizionata $\mathcal{P}(H_i|A)$.

Consideriamo l'evento prodotto AH_i . La sua probabilità può essere espressa come

$$\mathcal{P}(AH_i) = \mathcal{P}(H_i) \cdot \mathcal{P}(A|H_i) = \mathcal{P}(A) \cdot \mathcal{P}(H_i|A),$$

da cui si ricava

$$\mathcal{P}(H_i|A) = \frac{\mathcal{P}(H_i) \cdot \mathcal{P}(A|H_i)}{\mathcal{P}(A)}.$$

Il denominatore $\mathcal{P}(A)$ può essere sostituito dalla sua espressione data dall'equazione (5.8.1):

$$\mathcal{P}(H_i|A) = \frac{\mathcal{P}(H_i) \cdot \mathcal{P}(A|H_i)}{\sum_i \mathcal{P}(H_i) \cdot \mathcal{P}(A|H_i)}. \quad (5.8.2)$$

L'eq. (5.8.2), valida per un numero qualsiasi di *ipotesi* H_i , è detta *formula delle ipotesi* o *Teorema di Bayes*.

Nel caso particolare considerato sopra, le ipotesi H_i sono tre ed hanno la stessa probabilità

$$\mathcal{P}(H_1) = \mathcal{P}(H_2) = \mathcal{P}(H_3) = 1/3.$$

Inoltre,

$$\mathcal{P}(A|H_1) = 1/4, \quad \mathcal{P}(A|H_2) = 2/4, \quad \mathcal{P}(A|H_3) = 3/4,$$

per cui, applicando l'eq. (5.8.2), si trova:

$$\mathcal{P}(H_1|A) = 1/6; \quad \mathcal{P}(H_2|A) = 2/6; \quad \mathcal{P}(H_3|A) = 3/6.$$

Il Teorema di Bayes è la base per la soluzione del seguente tipo di problemi empirici: tra più ipotesi escludentisi a vicenda e a priori possibili, accettarne una come più probabile in base all'informazione che si ricava da un'esperienza.

Capitolo 6

Distribuzioni di variabile aleatoria

Nel Capitolo 5 abbiamo presentato alcuni concetti di base della teoria delle probabilità, espressi in termini di *eventi* e *probabilità degli eventi*. In questo Capitolo 6 approfondiremo ed estenderemo la trattazione introducendo i concetti di *variabile aleatoria* e *distribuzione di variabile aleatoria*, che consentono di rendere più efficienti e flessibili i calcoli probabilistici. Nel Capitolo 4 avevamo del resto già introdotto, a livello puramente intuitivo, le distribuzioni di probabilità per descrivere la dispersione delle misure di una grandezza fisica. Avremo ora la possibilità di chiarire e approfondire il significato di molti dei concetti e procedure utilizzati in modo fenomenologico al Capitolo 4.

In questo Capitolo affronteremo per prima cosa (§ 6.1) il problema, molto importante, delle *prove ripetute*, che ci consentirà di passare agevolmente da una descrizione in termini di probabilità degli eventi ad una descrizione in termini di distribuzione di variabile aleatoria (in questo caso la *distribuzione binomiale*). Considereremo poi le proprietà generali delle distribuzioni di variabile aleatoria, sia discreta che continua (§ 6.2) e introdurremo in modo formale alcuni parametri numerici che consentono di sintetizzare le proprietà principali delle distribuzioni: valor medio, varianza, coefficienti di asimmetria e appiattimento (§ 6.3). Studieremo quindi alcune distribuzioni particolarmente importanti per il trattamento dei dati sperimentali, quali la *distribuzione di Poisson* (§ 6.4) e la *distribuzione normale* di Gauss (§ 6.5), nonché altre semplici distribuzioni di uso comune in Fisica (§ 6.7). Concluderemo il Capitolo con un cenno alle *distribuzioni multivariate*, cioè alle distribuzioni relative a due o più variabili aleatorie (§ 6.8).

6.1 Distribuzione binomiale

6.1.1 Prove ripetute indipendenti

Consideriamo un'esperienza in cui un determinato evento può realizzarsi oppure non realizzarsi. Siano:

p la probabilità di realizzazione dell'evento;
 $q = 1 - p$ la probabilità di non realizzazione.

Supponiamo che l'esperienza venga ripetuta più volte, ogni volta in modo indipendente dalle precedenti. Vogliamo determinare la probabilità che, su n esperienze, k abbiano esito favorevole (che cioè l'evento considerato sia realizzato in k delle n esperienze).

Esempio: In una prova di tiro al bersaglio, sia p la probabilità di fare centro ad ogni singolo tiro (supponiamo che p resti costante ad ogni tiro). Qual è la probabilità che, su 3 tiri, 2 vadano a segno? Usiamo la nomenclatura seguente:

evento B = 2 tiri su 3 vanno a segno;
evento A_i = il tiro i -mo va a segno;
evento \bar{A}_i = il tiro i -mo non va a segno.

Come abbiamo già visto al §5.4, utilizzando le nozioni di somma e prodotto di eventi si può decomporre l'evento $B = A_1 A_2 \bar{A}_3 + A_1 \bar{A}_2 A_3 + \bar{A}_1 A_2 A_3$, e poiché gli eventi A_i sono

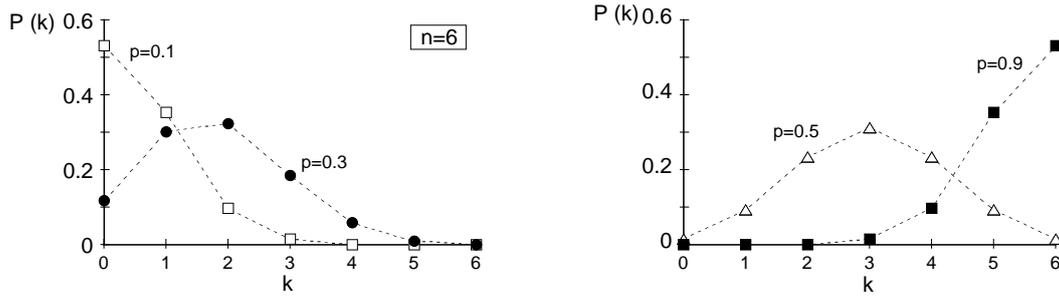


Figura 6.1: Distribuzioni binomiali per $n = 6$ prove ripetute e diversi valori della probabilità p di realizzazione della singola prova. La distribuzione $\mathcal{P}(k)$ è definita solo in corrispondenza dei valori interi di k : le linee tratteggiate sono una guida per l'occhio ma non hanno alcun significato reale. Si noti che per $p=0.5$ la distribuzione è simmetrica rispetto al valore $np = 3$.

indipendenti,

$$\mathcal{P}(B) = pp(1-p) + p(1-p)p + (1-p)pp = 3p^2(1-p).$$

Il problema delle prove ripetute può essere affrontato in modo generale come segue.

L'evento $B_k = (k \text{ esperienze su } n \text{ hanno esito favorevole})$ può considerarsi come somma di $\binom{n}{k}$ eventi incompatibili, corrispondenti alle $\binom{n}{k}$ combinazioni di n oggetti della classe k .

Ognuno degli $\binom{n}{k}$ eventi addendi è a sua volta il prodotto di n eventi indipendenti: k ad esito favorevole, $n - k$ ad esito sfavorevole. Applicando le regole per la probabilità della somma e del prodotto di eventi, si ottiene la probabilità dell'evento B_k :

$$\mathcal{P}(B_k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad (6.1.1)$$

Esempio: Un dado viene lanciato 7 volte. Qual è la probabilità dell'evento $B_2 = (\text{il 3 compare 2 volte})$? La probabilità di uscita del 3 ad ogni lancio è $p=1/6$. Ripetendo il ragionamento che ha portato all'eq. (6.1.1) otteniamo:

$$\mathcal{P}(B_2) = \binom{7}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0.234$$

6.1.2 La distribuzione binomiale

In un esperimento consistente in n prove ripetute indipendenti, ciascuna con probabilità p di realizzazione, il numero k di realizzazioni può essere considerato come il valore di una variabile intera K , con $0 \leq k \leq n$. La probabilità che k prove su n si realizzino è una funzione del valore della variabile intera K :

$$\mathcal{P}_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}. \quad (6.1.2)$$

Questa funzione di probabilità si chiama **distribuzione binomiale** (o *distribuzione di Bernoulli*). Il nome *binomiale* deriva dal fatto che $\mathcal{P}_{n,p}(k)$ è il generico termine dello sviluppo del binomio $(p+q)$ elevato alla potenza n -ma (vedi l'eq. 5.7.5 del § 5.7).

Nota: La distribuzione binomiale dipende dai due parametri n e p , che nell'eq. (6.1.2) sono stati indicati come indici del simbolo \mathcal{P} . Per semplificare la notazione, nel seguito gli indici n e p verranno omessi se non sono strettamente necessari.

Sommando i termini della distribuzione binomiale per tutti i valori k da 0 a n , si ottiene

$$\sum_{k=0}^n \mathcal{P}(k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1. \quad (6.1.3)$$

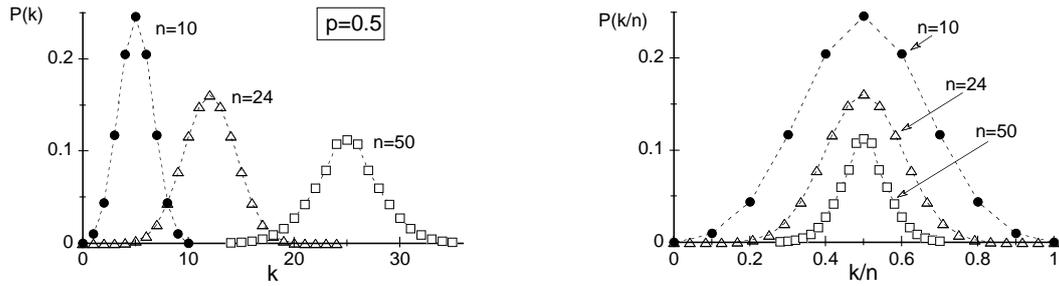


Figura 6.2: A sinistra: distribuzioni binomiali con probabilità $p = 0.5$ di realizzazione della singola prova, per diversi numeri n di prove ripetute; le distribuzioni sono simmetriche rispetto al valore $k = np$. A destra: le stesse distribuzioni disegnate in funzione dei valori normalizzati k/n . (Le linee tratteggiate sono solo una guida per l'occhio.)

Ciò corrisponde al fatto che la somma delle probabilità di tutti gli eventi possibili è la probabilità dell'evento certo, cioè 1 (*condizione di normalizzazione*).

Se $p = 0.5$, anche $q = 0.5$; in tale caso la distribuzione binomiale assume la forma $\mathcal{P}(k) = \binom{n}{k} 0.5^n$, simmetrica rispetto al valore $k = n/2$.

Esempio 1: La distribuzione binomiale per $n=6$ prove ripetute e per diversi valori di probabilità p della singola prova è rappresentata nella tabella seguente e in Fig. 6.1. Nella tabella ogni riga corrisponde ad uno dei possibili eventi; la prima colonna esprime la distribuzione in termini di probabilità dell'evento, l'ultima riporta i valori della corrispondente *variabile aleatoria K*.

	$p=0$	$p=0.1$	$p=0.3$	$p=0.5$	$p=0.9$	
$\mathcal{P}(k=0)$	1	0.531	0.118	0.015	1×10^{-6}	$k_1=0$
$\mathcal{P}(k=1)$	0	0.354	0.302	0.094	5×10^{-5}	$k_2=1$
$\mathcal{P}(k=2)$	0	0.098	0.324	0.234	0.001	$k_3=2$
$\mathcal{P}(k=3)$	0	0.015	0.185	0.312	0.015	$k_4=3$
$\mathcal{P}(k=4)$	0	0.001	0.059	0.234	0.098	$k_5=4$
$\mathcal{P}(k=5)$	0	5×10^{-5}	0.010	0.094	0.354	$k_6=5$
$\mathcal{P}(k=6)$	0	1×10^{-6}	7×10^{-4}	0.015	0.531	$k_7=6$

Esempio 2: Nel lancio di una moneta non truccata la probabilità che esca “testa” in un lancio singolo è $p = 0.5$. Vogliamo trovare la probabilità che, su n lanci, esattamente la metà abbiano come esito “testa”. La distribuzione binomiale consente di conoscere la probabilità che, su n lanci, k diano “testa”.

Nella Fig. 6.2 (a sinistra) sono mostrate alcune distribuzioni binomiali per $p = 0.5$ e diversi valori del numero di prove n . La probabilità che metà lanci diano “testa” è data dal valore della distribuzione in corrispondenza di $k = n/2$. Come ci si poteva attendere, le distribuzioni in Fig. 6.2 hanno il massimo in corrispondenza del valore $k = n/2$; tuttavia al crescere di n la probabilità di ottenere esattamente $k = n/2$ teste su n lanci si riduce progressivamente. Questo fatto, a prima vista sorprendente, può venire meglio compreso se si fissa l'attenzione, anziché sul numero totale k di lanci con esito “testa”, sulla frequenza di comparsa dell'esito “testa”, cioè sul rapporto k/n (Fig. 6.2, a destra): quando n cresce, i valori in ascissa divengono più fitti, e quelli con probabilità non trascurabile si addensano progressivamente in prossimità di $k/n=p=0.5$.

Questo esempio può servire a chiarire il concetto di *convergenza in probabilità* che sta alla base della definizione statistica di probabilità introdotta al § 5.3.2, eq. (5.3.3): al crescere di n le fluttuazioni della frequenza statistica $p^* = k/n$ intorno al valore $p = 0.5$ divengono sempre più ridotte. In altri termini, comunque si fissi un numero reale $\epsilon > 0$, la probabilità che $|k/n - p| < \epsilon$ tende a 1 per $n \rightarrow \infty$.

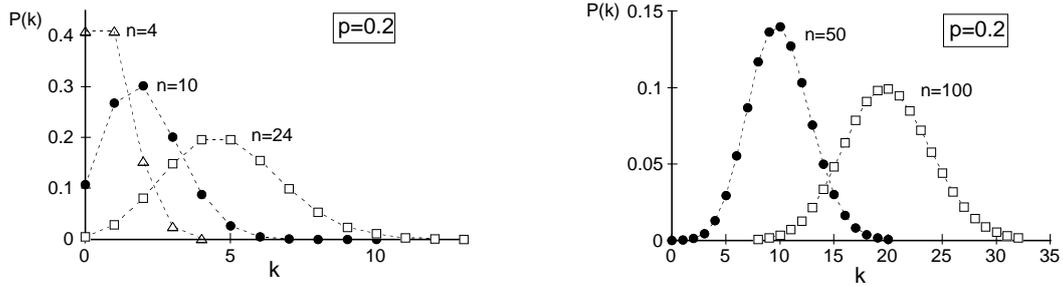


Figura 6.3: Distribuzioni binomiali con probabilità $p = 0.2$ di realizzazione della singola prova, per diversi numeri n di prove ripetute. Le distribuzioni sono asimmetriche, tuttavia l'asimmetria diminuisce evidentemente al crescere di n . (Le linee tratteggiate sono solo una guida per l'occhio.)

Esempio 3: Consideriamo due segmenti, uno, AD, di lunghezza ℓ , l'altro, BC, contenuto nel primo, di lunghezza $s = \ell/5$.



La probabilità che un punto, scelto a caso in AD, stia proprio in BC, è $p = s/\ell = 0.2$.

Se ora consideriamo n punti scelti a caso in AD, la probabilità che k degli n punti stiano in BC è data dalla distribuzione binomiale

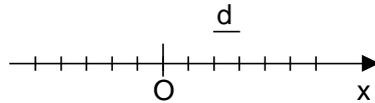
$$P(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

In Fig. 6.3 sono mostrate alcune distribuzioni binomiali con $p = 0.2$ per diversi numeri n di prove ripetute. Le distribuzioni sono asimmetriche, ma l'asimmetria diminuisce al crescere di n .

Il problema esaminato in questo esempio non cambia formalmente se AD e BC, anziché segmenti, sono intervalli di tempo, e si cerca la probabilità che, su n eventi che si realizzano casualmente nell'intervallo AD, k accadano proprio nell'intervallo BC.

6.1.3 Il problema del cammino casuale

Un'importante applicazione della distribuzione binomiale si ha nel cosiddetto problema del *cammino casuale*. Consideriamo il movimento di un corpo lungo l'asse x , con partenza in $x = 0$. Il movimento avviene a passi discreti di lunghezza d , verso destra oppure verso sinistra.



Il verso di ogni singolo passo viene scelto in modo casuale ed indipendente dalle scelte dei passi precedenti.

Indichiamo con

- p la probabilità che il singolo passo sia fatto verso destra,
- q la probabilità che il singolo passo sia fatto verso sinistra.

La probabilità che, su n passi, k siano fatti verso destra (e quindi $n - k$ verso sinistra) è data dalla distribuzione binomiale:

$$\mathcal{P}(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Lo spostamento netto verso destra dopo n passi è funzione della variabile aleatoria k :

$$L = kd - (n - k)d = (2k - n) d. \quad (6.1.4)$$

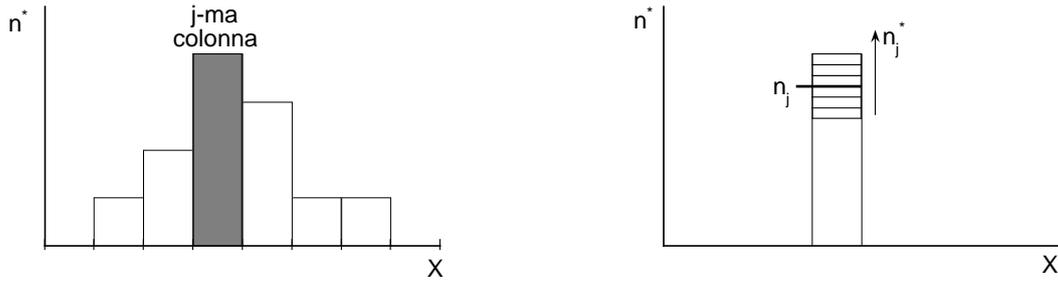


Figura 6.4: A sinistra: istogramma relativo alle misure ripetute N volte di una grandezza fisica X . L'altezza n_j^* della colonna j -ma (a destra) è una variabile aleatoria discreta che segue una distribuzione binomiale.

La distribuzione binomiale esprime pertanto anche la probabilità che, con n passi, lo spostamento netto L verso destra abbia un determinato valore.

Al problema del cammino casuale si possono ricondurre molti fenomeni di interesse fisico. Ad esempio, il moto di una molecola di gas, caratterizzato dagli urti casuali con le altre molecole, può essere assimilato ad un cammino casuale in tre dimensioni: i singoli passi sono i percorsi rettilinei tra due urti (in questo caso di lunghezza variabile e casuale); la scelta del passo è costituita dal processo di urto tridimensionale con un'altra molecola, in cui la direzione della traiettoria d'uscita è casuale.

6.1.4 Il caso limite $n=1$

Un caso particolare di distribuzione binomiale si ha quando $n=1$, cioè quando viene effettuata una sola prova. Gli esiti possibili sono due soli: la prova ha esito negativo oppure esito positivo. Corrispondentemente, la variabile aleatoria K assume i valori $k_1 = 0$ oppure $k_2 = 1$. La distribuzione binomiale è in questo caso:

$$\mathcal{P}(0) = 1 - p = q; \quad \mathcal{P}(1) = p. \quad (6.1.5)$$

6.1.5 Distribuzione binomiale e istogrammi

Un'interessante applicazione della distribuzione binomiale riguarda l'altezza delle **colonne degli istogrammi**.

Supponiamo di ripetere N volte la misurazione di una grandezza X e di costruire il relativo istogramma secondo le modalità descritte al § 4.3.2. Fissiamo l'attenzione sulla colonna j -ma dell'istogramma e supponiamo che in essa siano cadute n_j misure (Fig. 6.4). Se si ripetessero più volte le N misurazioni si avrebbero di volta in volta istogrammi diversi con diversi valori di n_j . Il numero n_j è pertanto una variabile aleatoria. L'istogramma è un campionamento della distribuzione limite della variabile X . La probabilità p_j che un generico valore x cada nell'intervallo j -mo dell'istogramma può essere calcolata a partire dalla distribuzione limite. La probabilità che n_j valori cadano nell'intervallo j -mo è data dalla distribuzione binomiale

$$\mathcal{P}_{N,p_j}(n_j) = \binom{N}{n_j} p_j^{n_j} q_j^{N-n_j}.$$

6.2 Variabili aleatorie e leggi di distribuzione

Vogliamo ora generalizzare i concetti introdotti al § 6.1.

Una **variabile aleatoria** (o *variabile casuale*, in ingl. *random variable*) è una grandezza che, in una data esperienza, può assumere un valore qualsiasi, a priori incognito, entro un prefissato insieme di valori.

Esempio: Nel precedente § 6.1 abbiamo affrontato il problema delle prove ripetute, che ha portato all'introduzione della distribuzione binomiale. Se una prova viene ripetuta n volte, devono essere presi in considerazione $\mathcal{N} = n + 1$ eventi, corrispondenti rispettivamente a $k = 0, 1, 2, \dots, n$ esiti favorevoli su n prove. Gli $n + 1$ eventi possono venire individuati e rappresentati per mezzo della *variabile aleatoria* K che può assumere tutti gli \mathcal{N} valori interi compresi tra 0 e n .

Si chiamano **variabili aleatorie discrete** le variabili aleatorie in grado di assumere un numero finito o infinito numerabile di valori.

Esempio: Il numero di volte che esce testa su 10 lanci di una moneta è una variabile aleatoria che può assumere un numero finito di valori.

Esempio: Il numero di volte che una moneta deve essere lanciata prima di ottenere “testa” è una variabile aleatoria discreta, che può assumere un numero infinito numerabile di valori.

Si chiamano **variabili aleatorie continue** le variabili aleatorie in grado di assumere un numero infinito non numerabile di valori.

Esempio: Il tempo di funzionamento di un'apparecchiatura elettronica prima della rottura è una variabile aleatoria continua.

Ci occuperemo per il momento di fenomeni aleatori il cui esito può essere individuato dal valore di una sola variabile aleatoria. Più avanti, al § 6.8, accenneremo a fenomeni aleatori che richiedono per la loro descrizione l'impiego di due o più variabili aleatorie.

6.2.1 Distribuzioni di variabile aleatoria discreta

Una variabile aleatoria (v.a.) discreta K può assumere un numero finito o infinito numerabile di valori $k_1, k_2, \dots, k_j, \dots$

Conoscere la *legge di distribuzione* della variabile aleatoria significa conoscere, per ogni valore k_j , il valore della corrispondente probabilità:

$$\mathcal{P}(k_j) = p_j. \quad (6.2.1)$$

Per un sistema completo di eventi incompatibili vale la *condizione di normalizzazione*:

$$\sum_j p_j = 1. \quad (6.2.2)$$

Esempio 1: La *distribuzione binomiale* $\mathcal{P}_{n,p}(k)$ introdotta nel § 6.1 è un esempio di distribuzione di variabile aleatoria discreta. La variabile aleatoria assume un numero finito $\mathcal{N} = n + 1$ di valori: $k = 0, 1, 2, \dots, n$.

Esempio 2: Consideriamo una sequenza di prove ripetute indipendenti di un fenomeno aleatorio (lancio di un dado, lancio di una moneta, etc.) Sia p la probabilità di realizzazione della singola prova, $q = 1 - p$ la probabilità di non realizzazione. Il numero di prove che è necessario fare per ottenere il primo risultato positivo è una variabile aleatoria discreta K , che può assumere un numero infinito numerabile di valori. Come conseguenza del teorema del prodotto per eventi indipendenti (§ 5.6.3), è facile vedere che la probabilità di ottenere il primo risultato positivo alla k -ma prova è data dalla legge di distribuzione $\mathcal{P}(k) = q^{k-1}p$, che soddisfa alla condizione di normalizzazione dell'eq. (6.2.2):

$$\sum_{k=1}^{\infty} p q^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (1-q) q^{k-1} = (1-q) \sum_{s=0}^{\infty} q^s = (1-q) \frac{1}{1-q} = 1.$$

Nella tabella seguente e in Fig. 6.5 sono riportati i primi valori della variabile aleatoria K e le corrispondenti probabilità calcolate per $p = 1/6$ e $p = 1/2$.

$K =$	1	2	3	4	5	...	k	...
$\mathcal{P} =$	p	qp	q^2p	q^3p	q^4p	...	$q^{k-1}p$...
$(p=1/6)$	0.166	0.139	0.116	0.096	0.080	...		
$(p=1/2)$	0.500	0.250	0.125	0.062	0.031	...		

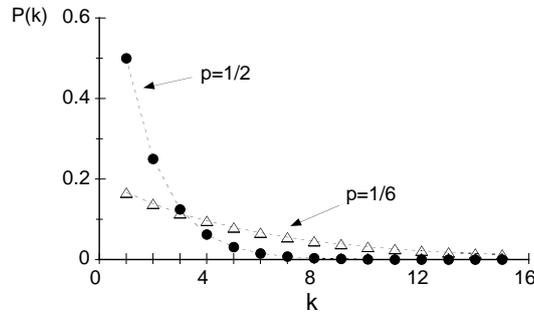


Figura 6.5: Probabilità di avere il primo esito favorevole alla k -ma prova per due valori di probabilità della singola prova: $p=1/6$ (ad es. probabilità di ottenere un dato numero nel lancio di un dado) e $p=1/2$ (ad es. probabilità di ottenere “testa” nel lancio di una moneta). Le linee tratteggiate sono solo una guida per l’occhio.

6.2.2 Distribuzioni di variabile aleatoria continua

Una variabile aleatoria continua X può assumere un numero infinito non numerabile di valori x . Non è quindi possibile esprimere una legge di distribuzione sotto forma di tabella. Addirittura, come vedremo, per il singolo valore della v.a. continua x si ha sempre che $\mathcal{P}(x) = 0$.

Per descrivere una distribuzione di v.a. continua si utilizzano due strumenti matematici:

- la *funzione di distribuzione cumulativa* (o semplicemente *funzione di distribuzione*) $F(x)$;
- la *densità di probabilità* $f(x)$, corrispondente alla derivata prima della funzione di distribuzione cumulativa: $f(x) = dF(x)/dx$.

La **funzione di distribuzione cumulativa** $F(x)$ misura la probabilità che la v.a. X assuma un qualunque valore non superiore a x (Fig. 6.6, a sinistra):

$$F(x) = \mathcal{P}(X \leq x). \quad (6.2.3)$$

È facile rendersi conto che la funzione di distribuzione cumulativa $F(x)$ gode delle seguenti proprietà:

- $F(x)$ è funzione non decrescente di x : $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
- $x \rightarrow -\infty \Rightarrow F(x) \rightarrow 0$
- $x \rightarrow +\infty \Rightarrow F(x) \rightarrow 1$

Nota: La funzione di distribuzione cumulativa può essere calcolata anche nel caso di una *variabile aleatoria discreta* K (Fig. 6.6, a destra):

$$F(k) = \mathcal{P}(K \leq k) = \sum_{k_i \leq k} \mathcal{P}(k_i). \quad (6.2.4)$$

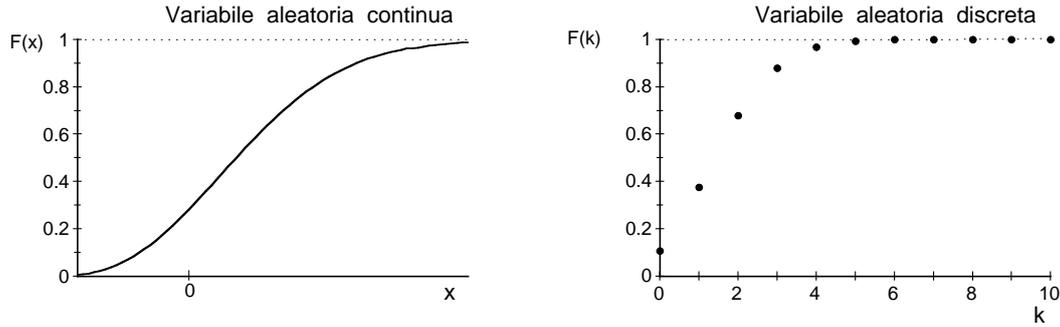


Figura 6.6: Funzione di distribuzione cumulativa per distribuzioni di v.a. continua X (a sinistra) e discreta K (a destra). La funzione $F(k)$ a destra è calcolata per una distribuzione binomiale con $n = 10$ e $p = 0.2$.

Se è nota la funzione di distribuzione cumulativa $F(x)$ di una variabile aleatoria continua X , la probabilità che la variabile X sia compresa tra due determinati valori x_1 e x_2 è (Fig. 6.6, a sinistra):

$$\mathcal{P}(x_1 < X \leq x_2) = \mathcal{P}(X \leq x_2) - \mathcal{P}(X \leq x_1) = F(x_2) - F(x_1). \quad (6.2.5)$$

Come conseguenza dell'eq. (6.2.5), riducendo progressivamente la larghezza dell'intervallo $x_2 - x_1$, si può vedere che, se $F(x)$ è continua in x_1 ,

$$\mathcal{P}(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} [F(x_2) - F(x_1)] = 0. \quad (6.2.6)$$

Per una v.a. continua X , la probabilità di ottenere un valore definito x_1 è sempre nulla. Ciò non significa che in un esperimento reale il valore x_1 non possa essere ottenuto; significa invece che al crescere del numero di esperimenti la frequenza relativa di comparsa del valore x_1 tende progressivamente a ridursi.

Poiché la probabilità di un singolo valore x è sempre nulla, è del tutto equivalente, nell'eq. (6.2.5), scrivere $\mathcal{P}(x_1 < X \leq x_2)$ oppure $\mathcal{P}(x_1 \leq X \leq x_2)$.

Nota: Un evento impossibile ha probabilità nulla $\mathcal{P} = 0$. Un evento certo ha probabilità unitaria $\mathcal{P} = 1$. Viceversa, un evento a probabilità nulla non è necessariamente impossibile e un evento a probabilità unitaria non è necessariamente certo.

La funzione **densità di probabilità** $f(x)$ per una v.a. continua X è definita come la derivata prima della funzione di distribuzione $F(x)$:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{dF}{dx}. \quad (6.2.7)$$

La probabilità che la v.a. X assuma un valore compreso tra x_1 e x_2 è data dall'integrale definito della densità di probabilità $f(x)$, calcolato tra x_1 e x_2 (Fig. 6.7, a destra):

$$\mathcal{P}(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x') dx' = F(x_2) - F(x_1). \quad (6.2.8)$$

La funzione di distribuzione $F(x)$ si ottiene dalla densità di probabilità $f(x)$ per integrazione:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x') dx'. \quad (6.2.9)$$

È facile rendersi conto che:

- a) la densità di probabilità $f(x)$ è sempre non negativa, $f(x) \geq 0$;

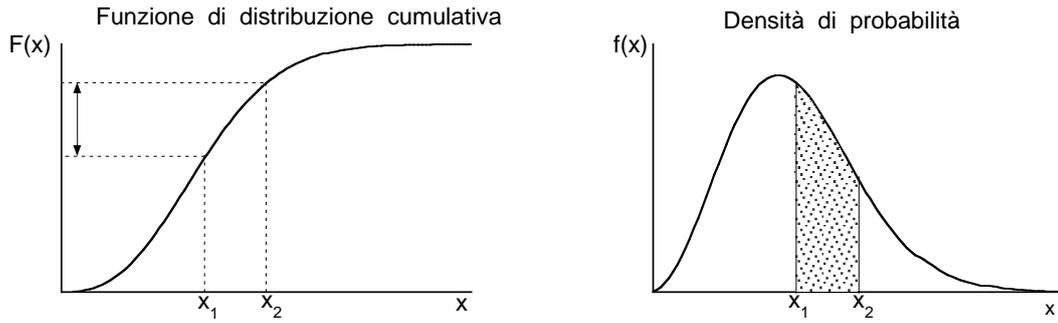


Figura 6.7: Funzione di distribuzione cumulativa (a sinistra) e densità di probabilità (a destra) per una v.a. continua X .

- b) l'area sottesa dalla curva della funzione $f(x)$ è unitaria, in quanto corrisponde alla probabilità dell'evento certo (condizione di normalizzazione):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1. \quad (6.2.10)$$

Nota: Dimensionalmente la densità di probabilità $f(x)$ è il rapporto tra una probabilità, cioè un numero puro, e la variabile aleatoria, cioè una grandezza fisica in genere dotata di dimensioni. La densità di probabilità $f(x)$ è perciò una grandezza dimensionata: le sue dimensioni sono inverse di quelle della variabile aleatoria X .

Esempio 3: Distribuzione a densità uniforme.

La distribuzione a densità uniforme è caratterizzata da una densità di probabilità costante all'interno di un intervallo di valori $x_1 < x < x_2$ e nulla all'esterno (Fig. 6.8, a sinistra):

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < x_1 \\ C & \text{per } x_1 \leq x < x_2 \\ 0 & \text{per } x \geq x_2 \end{cases} \quad (6.2.11)$$

dove C è una costante. Il valore di C è imposto dalla condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{x_2 - x_1}.$$

Utilizzando l'eq.(6.2.9) è facile vedere che la funzione di distribuzione cumulativa (Fig. 6.8, a destra) è:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < x_1 \\ (x - x_1)/(x_2 - x_1) & \text{per } x_1 < x < x_2 \\ 1 & \text{per } x \geq x_2 \end{cases} \quad (6.2.12)$$

Al §4.2 abbiamo utilizzato una distribuzione a densità uniforme per descrivere il risultato di una singola misurazione di una grandezza fisica. La larghezza dell'intervallo $x_2 - x_1$ in cui la densità $f(x)$ è diversa da zero corrisponde alla risoluzione Δx della misura.

Esempio 4: La distribuzione normale di Gauss introdotta al § 4.3:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2} \right]$$

è una densità di probabilità per la variabile aleatoria X . Analizzeremo in dettaglio le proprietà della distribuzione normale al § 6.5.

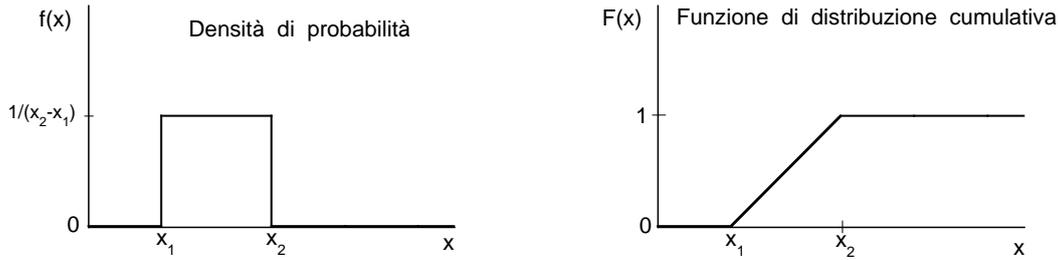


Figura 6.8: Distribuzione a densità uniforme: a sinistra la densità di probabilità, a destra la funzione di distribuzione cumulativa.

6.3 Caratteristiche numeriche delle distribuzioni

Una legge di distribuzione, ad esempio la funzione di distribuzione $F(x)$, caratterizza in modo completo il comportamento di una variabile aleatoria. In molti casi però non è necessaria una conoscenza così completa: può essere sufficiente conoscere il valore di alcuni *parametri* che individuano le caratteristiche fondamentali di una distribuzione. L'uso di tali parametri è particolarmente comodo nel confronto tra distribuzioni teoriche e distribuzioni sperimentali.

6.3.1 Caratteristiche di posizione

Alcune caratteristiche numeriche servono ad individuare la posizione delle distribuzioni.

Valor medio

La caratteristica di posizione più importante è il **valor medio** m (detto anche *media* o *valore d'attesa*).

Per una **variabile aleatoria discreta** K il valor medio è definito come

$$m_k = \langle k \rangle = \sum_j k_j p_j \quad (6.3.1)$$

dove l'indice j individua tutti i possibili valori della variabile K . L'eq. (6.3.1) rappresenta una media pesata: i valori k_j della variabile aleatoria discreta sono pesati dalle rispettive probabilità p_j . (La somma sui pesi, che dovrebbe comparire a denominatore nell'espressione della media pesata, viene omessa, in quanto $\sum p_j = 1$).

La definizione di media dell'eq. (6.3.1) è formalmente simile all'espressione della media campionaria di N valori sperimentali introdotta al § 4.3 (eq. 4.3.7):

$$m_k^* = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N k_j n_j = \sum_{j=1}^N k_j p_j^* \quad (6.3.2)$$

dove l'indice j scandisce le N colonne dell'istogramma e p_j^* è la frequenza statistica del valore k_j . Un collegamento tra le eq. (6.3.2) e (6.3.1) è dato dalla definizione statistica di probabilità (eq. 5.3.3):

$$\lim_{N \rightarrow \infty} p_j^* = p_j, \quad \text{per cui} \quad \lim_{N \rightarrow \infty} m_k^* = m_k$$

Per $N \rightarrow \infty$ la media campionaria m_k^* converge in probabilità al valor medio m_k .

Per una **variabile aleatoria continua** X , per analogia con l'eq. (6.3.1), il valor medio è definito come

$$m_x = \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (6.3.3)$$

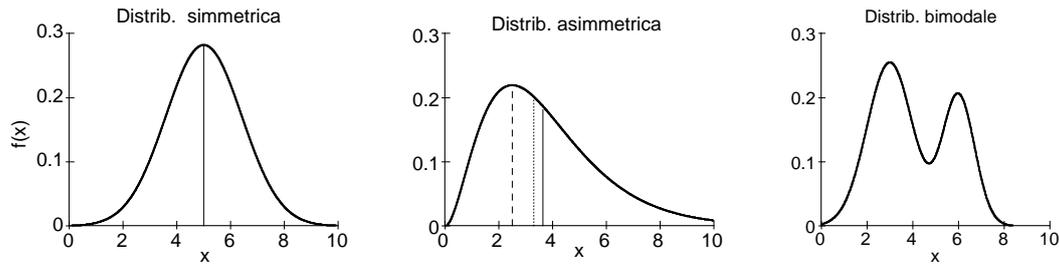


Figura 6.9: A sinistra: distribuzione unimodale simmetrica; media, moda e mediana coincidono. Al centro: distribuzione asimmetrica con coda verso destra: moda (linea tratteggiata), mediana (linea punteggiata) e media (linea continua) hanno valori diversi. A destra: distribuzione bimodale.

dove $f(x)$ è la funzione densità di probabilità. Alla sommatoria dell'eq. (6.3.1) si sostituisce l'integrale dell'eq. (6.3.3), al valore k_j della v.a. discreta K si sostituisce il valore x della v.a. continua X , alla probabilità p_j si sostituisce l'elemento di probabilità $f(x) dx$.

Nota: La sommatoria dell'eq. (6.3.2), corrispondente ad un campionamento sperimentale, ha necessariamente un numero finito di termini. Nell'eq. (6.3.1), che si riferisce ad una distribuzione di v.a., il simbolo \sum rappresenta una sommatoria se la v.a. discreta può assumere un numero finito di valori, rappresenta una serie se la v.a. discreta può assumere un numero infinito numerabile di valori.

Moda e mediana

Altre caratteristiche di posizione frequentemente usate sono la *moda* e la *mediana* (Fig.6.9).

La **moda** (ingl. *mode*) è il valore della variabile aleatoria per cui è massima la probabilità (per v.a. discrete) o la densità di probabilità (per v.a. continue). Distribuzioni dotate di due o più massimi vengono dette bimodali o plurimodali.

La **mediana** (ingl. *median*) è definita in questo modo: la probabilità della v.a. di avere un valore inferiore alla mediana è uguale alla probabilità di averlo superiore.

6.3.2 Caratteristiche di dispersione

Altre caratteristiche numeriche servono a descrivere la larghezza delle distribuzioni.

Varianza e scarto quadratico medio

Per misurare la larghezza di una distribuzione si utilizzano generalmente la **varianza** D e lo **scarto quadratico medio** $\sigma = \sqrt{D}$, detto anche *scarto tipo* (ingl. *standard deviation*).

Per una **variabile aleatoria discreta** K la varianza è definita come

$$D_k = \langle (k - m_k)^2 \rangle = \sum_j (k_j - m_k)^2 p_j \quad (6.3.4)$$

e lo scarto quadratico medio è

$$\sigma_k = \sqrt{D_k} = \sqrt{\sum_j (k_j - m_k)^2 p_j} \quad (6.3.5)$$

Come per il valor medio, anche per le eq. (6.3.4) e (6.3.5) è evidente la somiglianza formale con le eq. (4.3.10) e (4.3.11) che definiscono rispettivamente la varianza campionaria D^* e lo scarto quadratico medio campionario σ^* di un istogramma sperimentale.

Per una **variabile aleatoria continua** X , per analogia con l'eq. (6.3.4), la varianza è definita come

$$D_x = \langle (x - m_x)^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx \quad (6.3.6)$$

e lo scarto quadratico medio è

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx} \quad (6.3.7)$$

Un'espressione alternativa della varianza, valida per v.a. sia discrete che continue, si può ottenere seguendo lo stesso procedimento utilizzato nell'eq. (4.3.12) per la varianza campionaria:

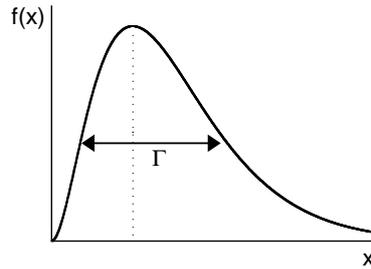
$$D_k = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2; \quad D_x = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2. \quad (6.3.8)$$

Lo scarto quadratico medio, a differenza della varianza, è dimensionalmente omogeneo con la variabile aleatoria.

Larghezza a metà altezza

Un parametro talora utilizzato per caratterizzare la dispersione di una distribuzione è la *larghezza a metà altezza* Γ , designata spesso con la sigla *FWHM* (dall'inglese Full Width at Half Maximum). Indicheremo con $\gamma = \Gamma/2$ la *semi-larghezza a metà altezza* della distribuzione.

L'uso della larghezza a metà altezza è particolarmente utile per distribuzioni per le quali non è possibile definire la varianza. Ad esempio, al § 6.7.1 considereremo la distribuzione di Lorentz, per la quale l'integrale (6.3.6) non converge, rendendo impossibile definire la varianza.



6.3.3 Momenti iniziali

Generalizzando la definizione di valor medio, si può introdurre un'intera famiglia di caratteristiche numeriche delle distribuzioni, i *momenti iniziali* α_s .

Si definisce *momento iniziale di ordine s* della variabile aleatoria discreta K o continua X il valor medio della potenza s -ma della variabile.

Per variabili aleatorie discrete

$$\alpha_s = \langle k^s \rangle = \sum_j k_j^s p_j \quad (6.3.9)$$

Per variabili aleatorie continue

$$\alpha_s = \langle x^s \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x) dx \quad (6.3.10)$$

Il *valor medio* è pertanto il momento iniziale di ordine 1: $m_k = \alpha_1(K)$, $m_x = \alpha_1(X)$.

In Appendice C.2 è presentato un metodo per il calcolo dei momenti di una distribuzione basato sull'uso della *funzione generatrice dei momenti*.

6.3.4 Momenti centrati

Un'altra famiglia di caratteristiche numeriche delle distribuzioni può essere costruita a partire dallo scarto s della variabile aleatoria rispetto al suo valor medio:

$$s_j = k_j - m_k; \quad \text{oppure} \quad s_x = x - m_x.$$

Si definisce *momento centrato di ordine s* della variabile aleatoria discreta K o continua X il valor medio della potenza s -ma dello scarto rispetto al valor medio.

Per variabili aleatorie discrete

$$\mu_s = \langle (k - m_k)^s \rangle = \sum_j (k_j - m_k)^s p_j \quad (6.3.11)$$

Per variabili aleatorie continue

$$\mu_s = \langle (x - m_x)^s \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^s f(x) dx \quad (6.3.12)$$

I momenti centrati μ sono legati ai momenti iniziali α da semplici relazioni lineari (vedi Appendice C.2, eq. C.2.10).

Nota: I momenti iniziali e centrati di ordine s esistono solo se convergono i corrispondenti integrali (6.3.10) e (6.3.12) per le v.a. continue, o le serie (6.3.9) e (6.3.11) per le v.a. discrete con un numero infinito di valori.

Analizziamo in dettaglio il significato dei momenti centrati di ordine più basso. Considereremo per semplicità solo il caso di v.a. discrete; l'estensione al caso di v.a. continue (sostituzione della sommatoria con l'integrale) è immediata.

Il **momento centrato di ordine 0** è sempre uguale a 1:

$$\mu_0 = \sum_j (k_j - m_k)^0 p_j = \sum_j p_j = 1; \quad (6.3.13)$$

l'eq. (6.3.13) costituisce infatti la condizione di normalizzazione.

Il **momento centrato di ordine 1** è sempre nullo:

$$\mu_1 = \sum_j (k_j - m_k) p_j = \sum_j k_j p_j - m_k \sum_j p_j = 0 \quad (6.3.14)$$

(è cioè nullo lo scarto medio rispetto al valor medio).

Il **momento centrato di ordine 2** non è altro che la **varianza**, già introdotta all'eq. (6.3.4) come misura della dispersione della distribuzione:

$$\mu_2 = D_k = \sum_j (k_j - m_k)^2 p_j. \quad (6.3.15)$$

Il **momento centrato di ordine 3**

$$\mu_3 = \sum_j (k_j - m_k)^3 p_j \quad (6.3.16)$$

(come del resto tutti i momenti centrati di ordine dispari) è nullo per distribuzioni simmetriche rispetto al valor medio. Il momento μ_3 viene utilizzato per misurare l'asimmetria della distribuzione.

Per avere un parametro adimensionale, si definisce il *coefficiente di asimmetria*

$$S = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad (6.3.17)$$

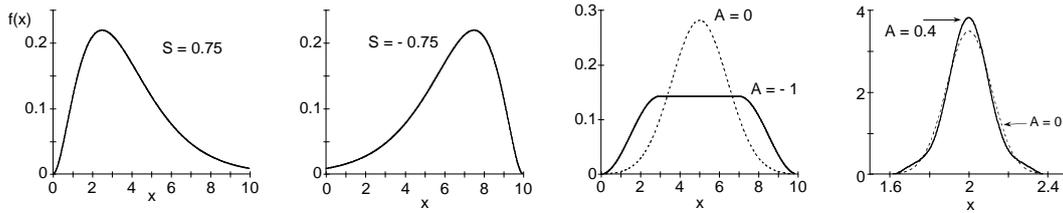


Figura 6.10: A sinistra, distribuzioni asimmetriche, con coefficiente di asimmetria $S = \mu_3/\sigma^3$ rispettivamente positivo e negativo. A destra, due distribuzioni simmetriche con coefficiente di appiattimento $A = \mu_4/\sigma^4 - 3$ rispettivamente negativo e positivo; la linea tratteggiata rappresenta una distribuzione normale, per la quale $A=0$.

Il coefficiente S è positivo o negativo a seconda che l'asimmetria comporti una coda della distribuzione verso destra o verso sinistra (Fig. 6.10, a sinistra).

Il **momento centrato di ordine 4**

$$\mu_4 = \sum_j (k_j - m_k)^4 p_j \quad (6.3.18)$$

viene utilizzato per caratterizzare la forma della distribuzione, prendendo come riferimento la distribuzione normale di Gauss. Per la distribuzione normale di Gauss il rapporto adimensionale μ_4/σ^4 vale 3. Il *coefficiente di appiattimento* di una qualsiasi distribuzione, definito come

$$A = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3, \quad (6.3.19)$$

è positivo o negativo a seconda che la distribuzione sia meno o più appiattita di una distribuzione gaussiana (Fig. 6.10, a destra).

6.3.5 Esempio: distribuzione binomiale

Come esempio di distribuzione di v.a. discreta consideriamo la distribuzione binomiale introdotta al § 6.1, eq. (6.1.2):

$$\mathcal{P}_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Si dimostra (vedi Appendice C.3) che valor medio m e varianza D della distribuzione binomiale valgono rispettivamente

$$m = \sum_{k=0}^n k \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k q^{n-k} = np \quad (6.3.20)$$

$$D = \sum_{k=0}^n (k - m_k)^2 \frac{n!}{(n-k)!k!} p^k q^{n-k} = npq. \quad (6.3.21)$$

Per un prefissato valore della probabilità p di realizzazione della singola prova, il valor medio m della distribuzione binomiale cresce proporzionalmente al numero n di prove ripetute (si rivedano le figure 6.1 e 6.2). La larghezza della distribuzione, misurata dallo scarto quadratico medio $\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{npq}$, cresce proporzionalmente alla radice quadrata del numero di prove ripetute. La *larghezza relativa* della distribuzione, cioè il rapporto σ/m , diminuisce proporzionalmente a $1/\sqrt{n}$. Per un prefissato numero n di prove, la varianza della distribuzione è massima quando $p = q = 0.5$.

I momenti centrati di ordine 3 e 4 valgono (vedi Appendice C.3):

$$\mu_3 = npq(q-p); \quad \mu_4 = npq(1 + 3npq - 6pq). \quad (6.3.22)$$

È facile calcolare i coefficienti di asimmetria e di appiattimento:

$$S = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}; \quad A = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{1-6pq}{npq}. \quad (6.3.23)$$

Il coefficiente di asimmetria S è zero se $p = q$ (distribuzione simmetrica). Se $p < q$ la distribuzione ha una coda verso destra e $S > 0$.

Il coefficiente di appiattimento A è negativo per valori di p compresi nell'intervallo $0.211 < p < 0.789$. In particolare, per $p = 0.5$ la distribuzione binomiale è più piatta della distribuzione gaussiana di uguali valor medio m e scarto quadratico medio σ .

Per $n \rightarrow \infty$ entrambi i coefficienti di asimmetria e di appiattimento tendono a zero. Come vedremo al §6.6, per $n \rightarrow \infty$ la forma della distribuzione binomiale tende alla forma di una distribuzione normale di Gauss, per la quale $S = A = 0$.

Esempio 1: Riprendiamo l'Esempio 2 del § 6.1. Si lancia n volte una moneta; la probabilità che esca testa in un singolo lancio è $p = 0.5$. La probabilità di ottenere k teste su n lanci è data dalla distribuzione binomiale. Nella Tabella seguente riportiamo le principali caratteristiche numeriche della distribuzione binomiale con $p=0.5$ per diversi valori di n .

n	m	σ	σ/m	S	A
10	5	1.58	0.316	0	-0.20
50	25	3.53	0.141	0	-0.04
100	50	5.00	0.100	0	-0.02

Al crescere di n crescono sia il valor medio m che lo scarto quadratico medio σ ; invece il rapporto σ/m , che misura la *larghezza relativa* della distribuzione, diminuisce (si riveda in proposito la Fig. 6.2). Il coefficiente di asimmetria S è sempre nullo, mentre il coefficiente di appiattimento A tende a zero al crescere di n .

Esempio 2: Riprendiamo in considerazione il problema del *cammino casuale* lungo una retta introdotto al § 6.1.3. Ogni passo ha lunghezza d e probabilità p di essere fatto verso destra, $q=1-p$ di essere fatto verso sinistra. La probabilità che su, n passi totali, k siano fatti verso destra è data dalla distribuzione binomiale. Lo spostamento netto verso destra dopo n passi è una variabile aleatoria $L = (2k - n)d$ (vedi eq. 6.1.4). Calcoliamo il valor medio della variabile L :

$$m_L = (2m_k - n)d = 2npd - nd = npd - nd + npd = npd - npq = nd(p - q).$$

Calcoliamo la varianza della variabile L :

$$D_L = \langle (L - m_L)^2 \rangle = \langle (2kd - nd - 2npd + nd)^2 \rangle = \dots = 4d^2 npq$$

Se $p=0.5$ la distribuzione binomiale è simmetrica come nell'esempio precedente; la distribuzione degli spostamenti L ha valor medio $m_L = 0$ e si allarga al crescere di n . Nella tabella seguente sono riportate le caratteristiche numeriche della distribuzione per $p=0.8$

n	m	σ	σ/m	S	A	m_L	σ_L
10	8	1.26	0.16	-0.47	0.025	6 d	3.52 d
50	40	2.83	0.07	-0.21	0.005	30 d	5.66 d
100	80	4.00	0.05	-0.15	0.002	60 d	8.00 d

Si noti che i coefficienti di asimmetria S e di appiattimento A si riducono progressivamente al crescere di n . Inoltre sia il valor medio m_L che lo scarto quadratico medio σ_L della distribuzione delle distanze L crescono al crescere di n .

Esempio 3: Consideriamo il caso limite $n=1$, introdotto al § 6.1.4. In questo caso il valor medio coincide con la probabilità di realizzazione, $m = p$, e la varianza è $D = pq$.

Esempio 4: Consideriamo infine il caso delle colonne degli istogrammi, introdotto al § 6.1.5. Se l'istogramma è basato su un numero totale N di valori, il valor medio del numero di valori n_j che cadono nella colonna j -ma è Np_j , e la varianza è $D = Np_jq_j$.

6.3.6 Esempio: distribuzione a densità uniforme

Come esempio di distribuzione di v.a. continua consideriamo la distribuzione a densità uniforme

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < x_1 \\ C & \text{per } x_1 \leq x < x_2 \\ 0 & \text{per } x \geq x_2 \end{cases} \quad (6.3.24)$$

Come abbiamo già visto al § 6.2, il valore della costante C è dato dalla condizione di normalizzazione:

$$C = \frac{1}{x_2 - x_1} = \frac{1}{\Delta x}.$$

Il valore medio m è dato da

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (6.3.25)$$

In modo analogo (vedi Appendice C.4) si calcolano la varianza e gli altri momenti di ordine superiore:

$$\mu_2 = D = \frac{(\Delta x)^2}{12}; \quad \mu_3 = 0; \quad \mu_4 = \frac{(\Delta x)^4}{80}. \quad (6.3.26)$$

La larghezza a metà altezza (FWHM) è $\Gamma = \Delta x$. Lo scarto quadratico medio $\sigma = \sqrt{D}$ è legato alla semilarghezza $\gamma = \Gamma/2 = \Delta x/2$ dalla relazione: $\sigma = \gamma/\sqrt{3}$.

Il coefficiente di asimmetria $S = \mu_3/\sigma^3$ è nullo, in quanto la distribuzione è simmetrica rispetto al valor medio. Il coefficiente di appiattimento $A = (\mu_4/\sigma^4) - 3$ è negativo: la distribuzione a densità uniforme è più appiattita di una distribuzione gaussiana di uguali valor medio e varianza (Fig. 6.11).

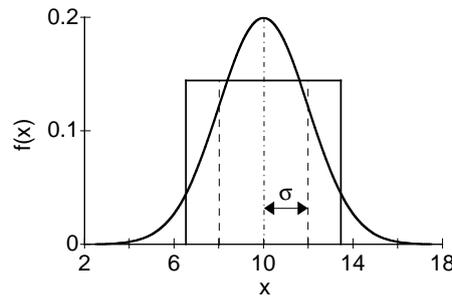


Figura 6.11: Confronto tra una distribuzione a densità uniforme e una distribuzione gaussiana di uguali valor medio $m = 10$ e scarto quadratico medio $\sigma = 2$. L'area sottesa dalle due curve tra $x = m - \sigma$ e $x = m + \sigma$ è il 58 % del totale nel caso della densità uniforme, il 68 % del totale nel caso della gaussiana.

Esempio: La distribuzione a densità uniforme è stata utilizzata al Cap. 4 per descrivere l'incertezza di una misura in due casi: quando l'incertezza di una singola misura è dovuta alla risoluzione (§ 4.2) oppure quando si cerca di stimare l'incertezza dovuta agli errori sistematici (§ 4.5). In entrambi i casi, come si è visto al § 4.5, si conviene di esprimere quantitativamente l'incertezza δX della misura come lo scarto tipo della distribuzione a densità uniforme: $\delta X = \Delta x/\sqrt{12}$.

6.4 Distribuzione di Poisson

Una legge di distribuzione di variabile aleatoria discreta che trova molte applicazioni nella pratica è la *distribuzione di Poisson*:

$$\mathcal{P}_a(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}. \quad (6.4.1)$$

Come vedremo, la distribuzione di Poisson rappresenta, in taluni casi, un'utile approssimazione della distribuzione binomiale, e gioca un ruolo fondamentale nell'interpretazione degli esperimenti basati sul conteggio di eventi casuali (ad esempio i decadimenti radioattivi). Prima di studiare le applicazioni della distribuzione di Poisson, vogliamo studiarne le principali proprietà matematiche. La variabile aleatoria K della distribuzione di Poisson può assumere qualsiasi valore intero non negativo: $k \geq 0$. L'insieme dei valori k è pertanto infinito numerabile. La distribuzione di Poisson dipende da un parametro positivo a (per confronto, si ricordi che la distribuzione binomiale dipende da due parametri, n e p).

L'eq. (6.4.1) soddisfa la condizione di normalizzazione. Infatti:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} = e^{-a} e^a = 1. \quad (6.4.2)$$

In Fig. 6.12 sono rappresentate alcune distribuzioni di Poisson per valori diversi del parametro a . Come si può vedere, al crescere di a il baricentro della distribuzione si sposta verso valori crescenti della variabile aleatoria K ; inoltre la distribuzione si allarga e diviene progressivamente meno asimmetrica. Queste proprietà possono essere descritte quantitativamente calcolando le caratteristiche numeriche della distribuzione.

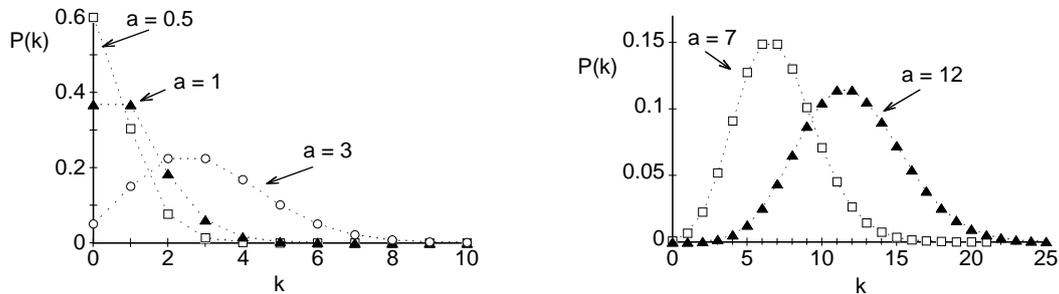


Figura 6.12: Distribuzioni di Poisson per diversi valori del parametro a . Il parametro a rappresenta sia il valor medio che la varianza della distribuzione. (Si faccia attenzione che i due grafici hanno scale diverse sia in ascissa che in ordinata.) Le linee tratteggiate sono solo una guida per l'occhio.

6.4.1 Caratteristiche numeriche

Il valor medio e la varianza della distribuzione di Poisson (vedi Appendice C.5 per la dimostrazione) sono:

$$m = a \quad (6.4.3)$$

$$D = \mu_2 = a \quad (6.4.4)$$

Il parametro a è pertanto uguale sia al valor medio che alla varianza della distribuzione (ciò è possibile in quanto la variabile aleatoria K è adimensionale).

Al crescere di a la larghezza assoluta della distribuzione, misurata dallo scarto quadratico medio $\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{a}$, cresce. Diminuisce invece la larghezza relativa $\sigma/m = 1/\sqrt{a}$.

La proprietà di avere valor medio e varianza uguali caratterizza la distribuzione di Poisson, ed è spesso usata come criterio per valutare se un campione statistico è compatibile con una distribuzione di Poisson.

I coefficienti di asimmetria e di appiattimento sono

$$S = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{1}{\sqrt{a}}; \quad A = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{1}{a}. \quad (6.4.5)$$

Al crescere del parametro a entrambi i coefficienti si riducono e la forma della distribuzione di Poisson tende alla forma della distribuzione normale.

6.4.2 Distribuzione di Poisson come limite della distribuzione binomiale

Come abbiamo visto al § 6.3.5, il valor medio della variabile aleatoria di una *distribuzione binomiale* è $m = np$, cioè il prodotto del numero di prove per la probabilità di realizzazione della singola prova.

Vogliamo ora dimostrare che per $n \rightarrow \infty$ e $p \rightarrow 0$, con il vincolo che il prodotto $m = np$ resti comunque finito, la distribuzione binomiale ha come limite la distribuzione di Poisson. A tale scopo, poniamo da subito $a = m = np$.

Ricordando che $q = 1 - p$ e ponendo $p = a/n$, la distribuzione binomiale può essere scritta come

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(k) &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{a}{n}\right)^k \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{a^k}{k!} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{-k} \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

Per $n \rightarrow \infty$, il primo ed il quarto fattore nell'ultima riga tendono ad 1. Per il terzo fattore si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = e^{-a}, \quad (6.4.7)$$

per cui infine, per $n \rightarrow \infty$ e $np =$ costante,

$$\mathcal{P}_{n,p}(k) \longrightarrow \mathcal{P}_a(k). \quad (6.4.8)$$

Nella pratica la distribuzione di Poisson viene utilizzata come approssimazione della distribuzione binomiale quando n è grande (tipicamente $n > 100$) e p piccolo (tipicamente < 0.05) (vedi Fig. 6.13).

Nota: La distribuzione binomiale dipende da due parametri, n e p . La distribuzione di Poisson invece dipende da un solo parametro, a .

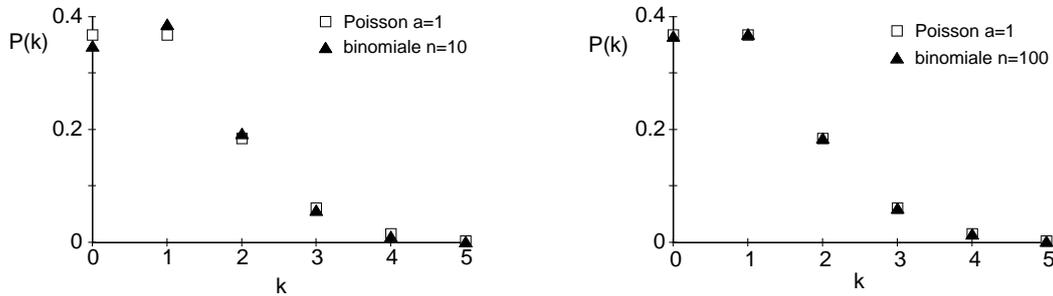


Figura 6.13: Confronto tra una distribuzione di Poisson con $a=1$ (quadrati) e due distribuzioni binomiali (triangoli) di uguale valor medio $m=np=1$ e diversi valori di n : a sinistra $n=10$, $p=0.1$, a destra $n=100$, $p=0.01$. Per n sufficientemente grande la distribuzione binomiale è ben approssimata dalla distribuzione di Poisson.

Esempio 1: In una fabbrica sono in funzione $n=50$ macchine dello stesso tipo. Durante un turno di funzionamento, ogni macchina ha una probabilità $p=0.04$ di guastarsi. Qual è la probabilità che in un turno si guastino $k=4$ macchine? La soluzione esatta, data dalla legge binomiale

$$\mathcal{P}_{50,0.04}(4) = \frac{50!}{46! 4!} 0.04^4 0.96^{46} = 0.09016$$

può essere approssimata dalla distribuzione di Poisson, con $a = np=2$:

$$\mathcal{P}_2(4) = \frac{2^4}{4!} e^{-2} = 0.0902.$$

Esempio 2: In un libro di 500 pagine sono disseminati a caso $n=300$ errori di stampa. La probabilità che uno degli errori, scelto a caso, cada in una determinata pagina è perciò $p=1/500$. La probabilità che una determinata pagina contenga $k=2$ errori può essere calcolata applicando la formula della distribuzione binomiale:

$$\mathcal{P}(2) = \binom{300}{2} (1/500)^2 (1 - 1/500)^{298} = 0.098792.$$

Alternativamente, osservando che n e p sono rispettivamente molto grande e molto piccolo, si può utilizzare l'approssimazione della distribuzione di Poisson, con $a = np=0.6$:

$$\mathcal{P}(2) = \frac{0.6^2}{2!} e^{-0.6} = 0.098786$$

6.4.3 Processi di Poisson stazionari

Riprendiamo in considerazione e rielaboriamo opportunamente un'applicazione particolare della distribuzione binomiale, che avevamo introdotto nell'Esempio 3 del § 6.1.2.

Supponiamo che in un intervallo (temporale o spaziale) di lunghezza ΔT si verifichino in modo casuale n eventi indipendenti, in modo tale però che due eventi non possano mai coincidere (nel tempo o nello spazio). La probabilità che uno degli n eventi, scelto a caso, si realizzi in un sub-intervallo Δt è $p = \Delta t/\Delta T$. La probabilità che, su n eventi, k si realizzino nel sub-intervallo Δt è data dalla distribuzione binomiale

$$\mathcal{P}_{np}(k) = \binom{n}{k} \left[\frac{\Delta t}{\Delta T} \right]^k \left[1 - \frac{\Delta t}{\Delta T} \right]^{n-k}. \quad (6.4.9)$$

Supponiamo ora che, al crescere dell'intervallo ΔT , il numero n di eventi cresca proporzionalmente, e si possa introdurre un parametro di densità $\lambda = n/\Delta T$ (eventi che si realizzano in media in un intervallo unitario di spazio o di tempo). In corrispondenza alla crescita di ΔT , diminuirà proporzionalmente la probabilità $p = \Delta t/\Delta T$ che un evento scelto a caso in ΔT si realizzi nel sub-intervallo fisso Δt . Comunque crescano ΔT e n e si riduca p , rimarrà in ogni caso costante il numero medio di eventi che cadono nel subintervallo Δt , cioè $m = np$. In queste condizioni, come abbiamo appena visto, la distribuzione binomiale può essere sostituita dalla distribuzione di Poisson.

Possiamo ora astrarre completamente dalla conoscenza di ΔT , n e p e riferirci unicamente al parametro di densità $\lambda = n/\Delta T$. La probabilità che k eventi si realizzino nel sub-intervallo Δt è espressa dalla distribuzione di Poisson, con valor medio $a = np = \lambda \Delta t$:

$$\mathcal{P}_a(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a} = \frac{(\lambda \Delta t)^k}{k!} e^{-\lambda \Delta t}. \quad (6.4.10)$$

Molti fenomeni di natura aleatoria sono caratterizzati da un numero medio λ di eventi indipendenti nell'unità di tempo o di spazio, ma non possono venire descritti dalla distribuzione binomiale (6.4.9) in quanto non è possibile attribuire dei valori ai parametri n e p . Questi fenomeni, detti *processi di Poisson*, seguono la distribuzione di Poisson espressa dall'eq. (6.4.10), con $a = \lambda \Delta t$.

Esempio 1: Le chiamate che arrivano ad una centrale telefonica si susseguono in modo casuale nel tempo. A seguito di un'osservazione prolungata, si è tuttavia potuta stabilire una densità di traffico di $\lambda=150$ chiamate all'ora. Il numero medio di chiamate nell'intervallo di tempo $\Delta t = 1$ minuto è $a = \lambda \Delta t = 150(1/60)=2.5$. La probabilità che nell'intervallo $\Delta t=1$ minuto arrivino $k=6$ chiamate è data dalla distribuzione di Poisson:

$$P(6) = \frac{2.5^6}{6!} e^{-2.5} = 0.278.$$

Esempio 2: Un microbo nocivo è presente nell'aria con una densità $\lambda=100$ individui per metro cubo. Qual è la probabilità che un campione di volume $v=2 \text{ dm}^3$ contenga almeno un microbo? Il

numero medio di microbi nel volume v è $a = \lambda v = 100/500 = 0.2$. La distribuzione di Poisson dà

$$P(k \geq 1) = 1 - P(0) = 1 - e^{-0.2} = 0.18.$$

6.4.4 Statistiche di conteggio

La distribuzione di Poisson (6.4.10) viene spesso utilizzata in Fisica per l'interpretazione statistica di esperimenti di conteggio di eventi casuali (si riveda in proposito il § 1.5).

Per fissare le idee, consideriamo un caso concreto, lo studio dei *raggi cosmici*. I raggi cosmici sono costituiti da particelle che attraversano l'atmosfera provenendo dallo spazio: protoni, particelle alfa (nuclei di elio), etc. Le particelle possono essere rivelate da opportuni dispositivi, ad esempio i contatori Geiger. Il numero di particelle rivelate da un dato dispositivo in un tempo prefissato Δt è una variabile aleatoria k . Osservazioni effettuate su tempi molto lunghi portano comunque a ritenere che il fenomeno dei raggi cosmici non subisca variazioni nel tempo; si può quindi introdurre una densità λ pari al numero medio di particelle rivelabili nell'unità di tempo. La variabile aleatoria k segue quindi la distribuzione di Poisson (6.4.10), con $a = \lambda \Delta t$.

Se la grandezza λ fosse nota a priori, conosceremmo anche $a = \lambda \Delta t$. Pertanto l'espressione (6.4.10) della distribuzione di Poisson ci consentirebbe di calcolare la probabilità di ottenere dal rivelatore un qualunque prefissato numero k di conteggi nell'intervallo di tempo Δt .

Nella pratica, il problema che si pone è esattamente l'opposto: si vuole determinare il valore della grandezza λ a partire da esperimenti di conteggio, e valutare l'incertezza dovuta all'aleatorietà del fenomeno dei raggi cosmici.

Si tratta di una situazione analoga a quella affrontata al § 4.3 a proposito degli errori casuali: lì, a partire da un numero finito di misurazioni di una grandezza fisica, si è mostrato come è possibile stimare il valor medio della distribuzione limite, assunto come valore vero della misura, e valutare l'incertezza della stima.

Nel caso qui considerato, la variabile aleatoria è discreta anziché continua, e la distribuzione limite è una poissoniana anziché una gaussiana.

Supponiamo di fare *una sola misurazione* nell'intervallo di tempo Δt . Il risultato sarà un numero k di conteggi. L'unico valore misurato k corrisponde anche alla media campionaria della variabile aleatoria: $m_k = a^* = k$. Come abbiamo già anticipato al § 4.3 e come dimostreremo al Cap. 7, la migliore stima della media limite è la media campionaria; nel nostro caso, la migliore stima di a è pertanto $a^* = k$:

$$\tilde{a} = k, \quad \text{per cui} \quad \tilde{\lambda} = k/\Delta t. \quad (6.4.11)$$

Naturalmente la stima \tilde{a} ha carattere aleatorio, ed è quindi affetta da incertezza. In accordo con le convenzioni introdotte al Cap. 4 a proposito degli errori casuali, si assume come misura dell'incertezza lo scarto quadratico medio della distribuzione limite delle medie campionarie. In questo caso, la media campionaria coincide con l'unica misura effettuata, $a^* = k$, e la distribuzione limite delle medie campionarie coincide con la distribuzione limite dei singoli conteggi, cioè con la distribuzione di Poisson (6.4.10).

La distribuzione di Poisson gode della peculiare proprietà che media e varianza coincidono, per cui $\sigma = \sqrt{a}$. La migliore stima dello scarto quadratico medio è riconducibile alla migliore stima del parametro a :

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\tilde{a}} = \sqrt{k}, \quad \text{per cui} \quad \delta\lambda = \sqrt{k}/\Delta t. \quad (6.4.12)$$

L'incertezza sul numero di conteggi è quindi pari alla radice quadrata del numero di conteggi. Confrontando le eq. (6.4.11) e (6.4.12), si vede che l'incertezza relativa sul numero dei conteggi, e quindi anche sulla grandezza λ , diminuisce in modo inversamente proporzionale alla radice quadrata del numero di conteggi:

$$\delta\lambda/\tilde{\lambda} = 1/\sqrt{k}. \quad (6.4.13)$$

Esempio: Il **decadimento radioattivo** di un atomo è un processo aleatorio. Se all'istante t sono presenti N nuclei di un determinato isotopo radioattivo, nell'intervallo di tempo dt la

variazione media del numero di nuclei originali è $dN = -N\alpha dt$, dove α è la *costante di disintegrazione*. Il numero medio di nuclei radioattivi si riduce nel tempo secondo la legge esponenziale: $N(t) = N_0 \exp(-\alpha t)$. Dato l'andamento esponenziale, il numero medio λ di decadimenti per unità di tempo si riduce progressivamente.

Tuttavia, se la costante di disintegrazione α è sufficientemente piccola, l'andamento esponenziale può essere approssimato da un andamento lineare anche per intervalli di tempo relativamente lunghi, nei quali λ può essere considerato costante. Supponiamo che all'inizio di un esperimento di conteggio siano presenti N_1 nuclei non decaduti. Allora il numero medio di decadimenti nell'intervallo di tempo Δt , $a = \lambda\Delta t$, è dato da

$$a = N_1 [1 - e^{-\alpha\Delta t}] \simeq N_1 [1 - 1 + \alpha\Delta t] = N_1 \alpha \Delta t.$$

(Nel secondo passaggio si è approssimato l'esponenziale con il suo sviluppo in serie troncato al secondo termine: $\exp(-\alpha\Delta t) \simeq 1 - \alpha\Delta t$). Il numero k di decadimenti che si realizzano nell'intervallo Δt è una variabile aleatoria soggetta alla distribuzione di Poisson (6.4.10), con $a = N_1 \alpha \Delta t$. Se nell'intervallo Δt si contano k eventi di decadimento, allora è possibile stimare $a = k \pm \sqrt{k}$.

È importante riflettere sul fatto che, nel caso del conteggio di eventi che seguono la statistica di Poisson, una sola misura (cioè un solo conteggio) consente di stimare l'incertezza. Come abbiamo già osservato, ciò è dovuto alla proprietà della distribuzione di Poisson di avere media e varianza coincidenti.

Invece, nel caso di misurazioni affette da errori casuali (come abbiamo visto al § 4.3), per stimare l'incertezza di una misura è necessario disporre di almeno due valori. Ciò dipende dal fatto che in quel caso media e varianza della distribuzione limite (generalmente gaussiana) sono completamente scorrelate.

Ovviamente, anche nel caso del conteggio di eventi casuali è possibile *ripetere più volte la misurazione*. Supponiamo di ripetere N volte il conteggio, ogni volta per un intervallo di tempo Δt . Come risultato avremo N valori k_i , cui corrisponderanno una media campionaria e una varianza campionaria

$$m_k^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i, \quad D_k^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (k_i - m_k^*)^2. \quad (6.4.14)$$

Il grado di concordanza tra i valori campionari m_k^* e D_k^* è un buon test per verificare se la distribuzione limite può ragionevolmente essere assunta come poissoniana.

Assumeremo ancora come migliore stima del parametro a la media campionaria m_k^* , e come incertezza sulla stima lo scarto quadratico medio della distribuzione limite delle medie campionarie:

$$\tilde{a} = m_k^*, \quad \delta\tilde{a} = \sigma[m_k^*] = \frac{\sigma[k]}{\sqrt{N}} \simeq \frac{\sqrt{D_k^*}}{\sqrt{N}}. \quad (6.4.15)$$

Come per il caso delle misure affette da errori casuali, aumentando il numero N di misure si riduce l'incertezza. È però facile vedere che è del tutto equivalente ripetere N conteggi della durata di Δt secondi ciascuno, oppure fare un unico conteggio per una durata di tempo $N\Delta t$

Esempio: Un **contatore Geiger** registra ogni $\Delta t = 15$ secondi il numero di impulsi dovuti ai raggi cosmici e alla radioattività naturale.

In un *primo esperimento*, il contatore viene fatto funzionare per circa *un'ora e mezza*, precisamente per $N = 361$ intervalli Δt . La frequenza campionaria dei diversi valori k di conteggio è rappresentata in Fig. 6.14 a sinistra dalle barre verticali. Media e varianza campionaria (eq. 6.4.14) sono rispettivamente $m_k^* = 4.629$ e $D_k^* = 4.931$. Utilizzando l'eq. (6.4.15), si è stimato un valor medio $\tilde{a} = 4.63 \pm 0.11$, pari a $\tilde{a}/\Delta t = 0.308 \pm 0.007$ conteggi al secondo, e si è costruita la corrispondente distribuzione di Poisson (cerchi scuri).

In un *secondo esperimento*, il contatore viene fatto funzionare per circa *otto ore*, precisamente per $N = 28613$ intervalli Δt . La frequenza campionaria dei diversi valori k di conteggio è rappresentata in Fig. 6.14 a destra dalle barre verticali. Media e varianza campionaria (eq. 6.4.14) sono rispettivamente $m_k^* = 4.592$ e $D_k^* = 4.638$. Utilizzando l'eq. (6.4.15), si è stimato

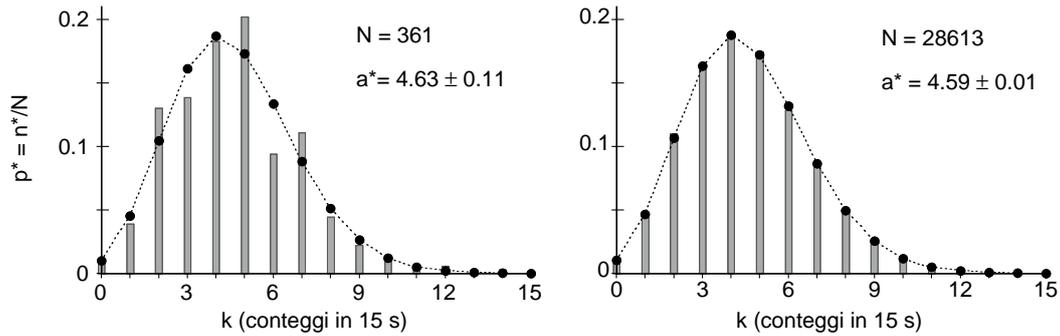


Figura 6.14: Due diversi campionamenti di una distribuzione di Poisson relativa ai conteggi registrati in $\Delta t = 15$ s da un contatore Geiger (barre verticali): campionamento per circa un'ora e mezzo (a sinistra) e per circa otto ore (a destra). I cerchi neri rappresentano le corrispondenti distribuzioni di Poisson stimate a partire dai campioni. (Le linee tratteggiate sono solo una guida per l'occhio.)

un valor medio $\tilde{a} = 4.59 \pm 0.01$, pari a $\tilde{a}/\Delta t = 0.306 \pm 0.0007$ conteggi al secondo, e si è costruita la corrispondente distribuzione di Poisson (cerchi scuri). Come si vede, aumentando il numero N di intervalli di tempo Δt si è ridotta l'incertezza sul valore stimato di a . I due valori di a ottenuti nei due esperimenti sono comunque compatibili.

Alternativamente, se in entrambi gli esperimenti (di durata un'ora e mezzo il primo, otto ore il secondo) si fosse fatto *un unico conteggio*, si sarebbero ottenuti i valori rispettivamente $k = 1671$ e $k = 131385$. Utilizzando le eq. (6.4.11) e (6.4.12) si sarebbero trovati i valori 0.308 ± 0.007 conteggi al secondo nel primo esperimento e 0.306 ± 0.0008 conteggi al secondo nel secondo, in accordo con i risultati della procedura precedente.

6.4.5 Distribuzione di Poisson e istogrammi

Un'interessante applicazione della distribuzione di Poisson riguarda la statistica dei conteggi nelle **colonne degli istogrammi**. Abbiamo già visto (§ 6.1.5) che se l'istogramma si riferisce ad un numero noto N di misure, la distribuzione dei valori n_j che cadono in una determinata colonna è di tipo binomiale.

In molti casi pratici però, anziché fissare il numero totale N di osservazioni, si fissa il tempo Δt durante il quale vengono fatte le osservazioni. In tal caso n_j^* segue una statistica di tipo poissoniano. Il valor medio della distribuzione di Poisson è $a = n_j$, dove n_j è il numero di conteggi nella colonna j -ma previsto dalla distribuzione limite della grandezza X : $n_j = p_j N$.

Un generico valore sperimentale n_j^* approssima pertanto il valore limite n_j con un'incertezza δn_j pari allo scarto quadratico medio della distribuzione di Poisson, $\sigma_j = \sqrt{a} = \sqrt{n_j}$, che può essere stimato come $\tilde{\sigma}_j \simeq \sqrt{n_j^*}$.

Questo argomento verrà ripreso nel § 7.6.

6.5 Distribuzione normale di Gauss

La *distribuzione normale* (o *gaussiana*) è una distribuzione di variabile aleatoria continua che riveste un ruolo fondamentale nella teoria delle probabilità e nella teoria degli errori. Ad esempio, abbiamo già notato al § 4.3 che molto spesso la distribuzione normale può venire utilizzata come *distribuzione limite* per istogrammi relativi a misurazioni di grandezze fisiche.

L'espressione analitica della densità di probabilità della distribuzione normale è

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]. \quad (6.5.1)$$

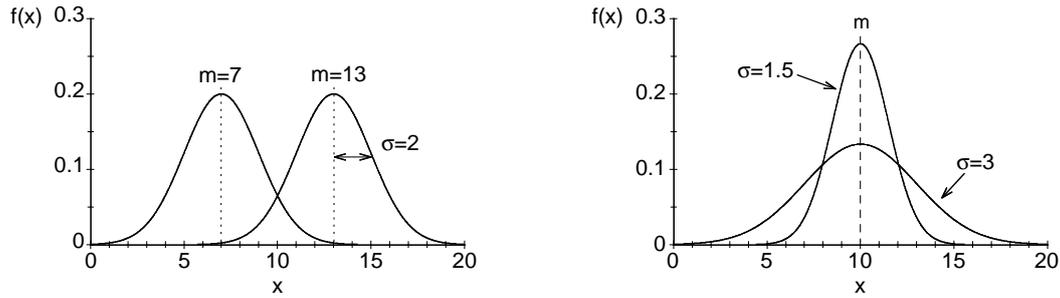


Figura 6.15: Distribuzione normale di Gauss. A sinistra due distribuzioni con uguale scarto quadratico medio σ e diversi valori medi m . A destra due distribuzioni con uguale valor medio m e diversi scarti quadratici medi σ .

La distribuzione dipende da due parametri: m è un parametro reale, σ è un parametro reale e positivo.

Per qualsiasi valore dei parametri m e σ , il grafico della densità $f(x)$ ha una forma a campana, simmetrica rispetto al valore $x = m$ (Fig. 6.15).

6.5.1 Condizione di normalizzazione

Verifichiamo innanzitutto che la densità di probabilità espressa dall'eq. (6.5.1) soddisfa la condizione di normalizzazione

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx = 1. \quad (6.5.2)$$

Allo scopo, operiamo nell'eq. (6.5.2) la sostituzione di variabile

$$t = \frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}, \quad \text{per cui} \quad dx = \sigma\sqrt{2} dt \quad (6.5.3)$$

ottenendo

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1. \quad (6.5.4)$$

L'integrale nell'eq. (6.5.4) è infatti l'*integrale di Eulero-Poisson*, per il quale si dimostra (vedi Appendice C.6) che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}. \quad (6.5.5)$$

6.5.2 Caratteristiche numeriche

Il calcolo delle caratteristiche numeriche della distribuzione normale può essere fatto agevolmente (vedi Appendice C.7) ricorrendo alla sostituzione di variabile dell'eq. (6.5.3) e ricordando il valore dell'integrale di Eulero-Poisson, eq. (6.5.5).

Il *valore medio* della distribuzione è dato dal parametro m . Il parametro m individua quindi la posizione della distribuzione sull'asse delle x (Fig. 6.15, a sinistra).

Per i *momenti centrati* vale la formula di ricorrenza:

$$\mu_s = (s-1)\sigma^2 \mu_{s-2} \quad (s \geq 2). \quad (6.5.6)$$

Poiché $\mu_1 = 0$ (valor medio dello scarto), la formula di ricorrenza mostra che tutti i momenti centrati di ordine dispari sono nulli, $\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 = \dots = 0$. Ciò dipende dal fatto che la distribuzione è simmetrica rispetto al valor medio m .

Partendo da $\mu_0 = 1$ (integrale di normalizzazione) ed utilizzando la formula di ricorrenza, si vede che la *varianza* della distribuzione normale vale $D = \mu_2 = \sigma^2$. Il parametro σ rappresenta quindi lo *scarto quadratico medio* della distribuzione.

La distribuzione normale ha il valor massimo in corrispondenza di $x = m$. È facile vedere che

$$f_{\max}(x) = f(m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{0.399}{\sigma} :$$

al crescere del parametro σ la distribuzione si allarga e si abbassa (Fig. 6.15, a destra). A distanza σ dal valor medio m , la distribuzione vale:

$$f(m + \sigma) = f(m - \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-1/2} = 0.6 f(m).$$

Applicando ulteriormente la formula di ricorrenza, si vede che $\mu_4 = 3\sigma^4$. Il *coefficiente di appiattimento*, definito come $A = \mu_4/\sigma^4 - 3$, è quindi nullo per la distribuzione normale.

Nota: È facile verificare che la larghezza a metà altezza (FWHM) della distribuzione normale è $\Gamma = 2.35\sigma$, per cui $\gamma = \Gamma/2 = 1.17\sigma$.

6.5.3 Calcolo delle probabilità

Nella pratica, è importante poter calcolare la probabilità che la variabile aleatoria x abbia un valore compreso tra due estremi α e β :

$$\mathcal{P}(\alpha < x < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx \quad (6.5.7)$$

L'integrale che compare nell'eq. (6.5.7) dipende dai parametri m, σ della distribuzione normale e dagli estremi α e β .

Il primo passo per la soluzione del problema è la sostituzione di variabile

$$z = \frac{x-m}{\sigma}, \quad \text{per cui} \quad dx = \sigma dz \quad (6.5.8)$$

Si noti che la sostituzione dell'eq. (6.5.8) differisce per un fattore $\sqrt{2}$ da quella dell'eq. (6.5.3) utilizzata per verificare la normalizzazione della distribuzione e per calcolarne i momenti.

La nuova variabile z rappresenta lo scarto della variabile x rispetto al valor medio m , misurato in unità σ ; viene generalmente chiamata *variabile normale standardizzata*.

Vogliamo ora trovare la distribuzione $\phi(z)$ della variabile normale standardizzata z . Allo scopo, osserviamo che gli elementi di probabilità devono essere uguali rispetto alle due variabili x e z , cioè $f(x) dx = \phi(z) dz$. Pertanto, la distribuzione della variabile z , detta *densità normale standard*, deve essere

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right]. \quad (6.5.9)$$

La densità normale standard ha valor medio nullo, $m=0$, e scarto quadratico medio unitario, $\sigma=1$ (fig. 6.16, a sinistra).

Una volta operata la sostituzione degli estremi d'integrazione

$$\alpha \rightarrow z_{\alpha} = \frac{\alpha-m}{\sigma}, \quad \beta \rightarrow z_{\beta} = \frac{\beta-m}{\sigma}, \quad (6.5.10)$$

il calcolo delle probabilità si riduce a

$$\mathcal{P}(\alpha < x < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_{\alpha}}^{z_{\beta}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dz. \quad (6.5.11)$$

Il calcolo dell'integrale nell'eq. (6.5.11) non è elementare e viene in genere tabulato sotto varie forme.

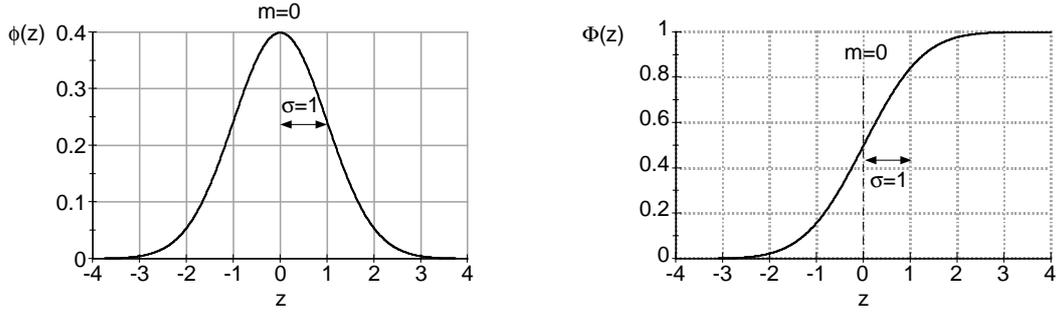


Figura 6.16: Distribuzione normale standardizzata. A sinistra la *densità di probabilità normale standard* $\phi(z)$ definita dall'eq. (6.5.9). A destra la corrispondente *funzione di distribuzione cumulativa standard* $\Phi(z)$ definita dall'eq. (6.5.12).

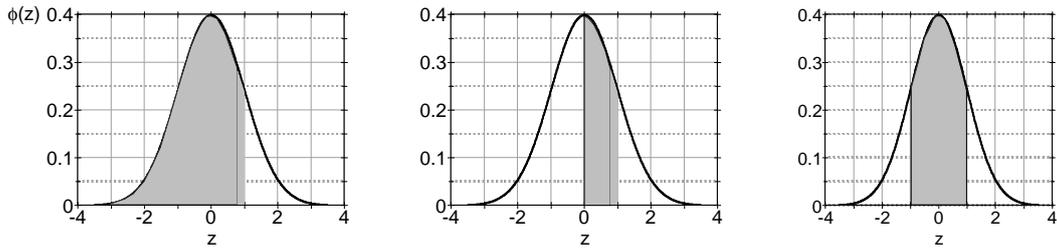


Figura 6.17: Integrali della funzione normale standardizzata. L'area grigia rappresenta il valore delle tre funzioni $\Phi(z)$ (a sinistra), $\Phi^*(z)$ (al centro) e $\tilde{\Phi}(z)$ (a destra) per il valore $z=1$.

- a) Può venire tabulata la *funzione di distribuzione cumulativa standard* (Fig. 6.17, a sinistra)

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left[-\frac{z'^2}{2}\right] dz', \quad (6.5.12)$$

per cui

$$\mathcal{P}(\alpha < x < \beta) = \Phi(z_\beta) - \Phi(z_\alpha). \quad (6.5.13)$$

- b) Alternativamente (Fig. 6.17, al centro) si può trovare tabulata la funzione (ad argomento $z \geq 0$)

$$\Phi^*(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp\left[-\frac{z'^2}{2}\right] dz'. \quad (6.5.14)$$

- c) Nelle applicazioni relative alla teoria degli errori, per le quali è rilevante la simmetria della distribuzione normale rispetto al valor medio, si utilizza spesso la funzione (Fig. 6.17, a destra)

$$\tilde{\Phi}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^z \exp\left[-\frac{z'^2}{2}\right] dz'. \quad (6.5.15)$$

Utilizzando le tabelle (vedi Appendice D.3), è facile verificare che per qualsiasi distribuzione normale:

$$\mathcal{P}(m < x < m + \sigma) = \mathcal{P}(0 < z < 1) = \Phi^*(1) = 0.3413$$

$$\mathcal{P}(m < x < m + 2\sigma) = \mathcal{P}(0 < z < 2) = \Phi^*(2) = 0.4772$$

$$\mathcal{P}(m < x < m + 3\sigma) = \mathcal{P}(0 < z < 3) = \Phi^*(3) = 0.4987$$

Le probabilità della variabile x di cadere entro un intervallo centrato nel valor medio m e di ampiezza 2σ , 4σ , 6σ sono rispettivamente (vedi Fig. 6.18):

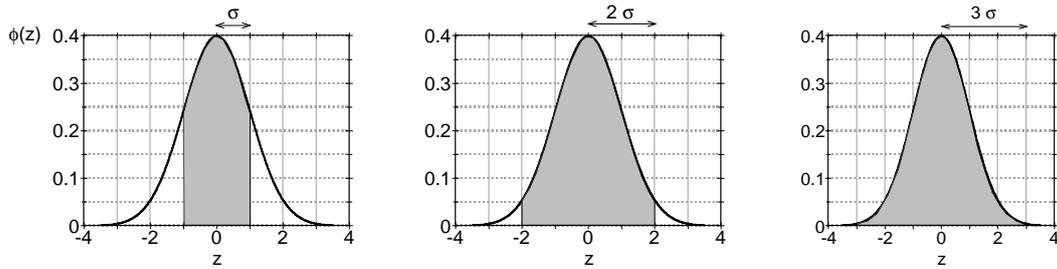


Figura 6.18: La probabilità che $-1 < z < +1$ è 0.6826 (a sinistra); la probabilità che $-2 < z < +2$ è 0.9544 (al centro); la probabilità che $-3 < z < +3$ è 0.9974 (a destra).

$$\mathcal{P}(m - \sigma < x < m + \sigma) = \mathcal{P}(-1 < z < 1) = \tilde{\Phi}(1) = 0.6826$$

$$\mathcal{P}(m - 2\sigma < x < m + 2\sigma) = \mathcal{P}(-2 < z < 2) = \tilde{\Phi}(2) = 0.9544$$

$$\mathcal{P}(m - 3\sigma < x < m + 3\sigma) = \mathcal{P}(-3 < z < 3) = \tilde{\Phi}(3) = 0.9974$$

Nota 1: La variabile aleatoria standardizzata è adimensionale, in quanto definita come il rapporto tra grandezze omogenee (eq. 6.5.8).

Nota 2: La nomenclatura per gli integrali della densità normale standard non è univoca. Spesso in letteratura e nelle tabelle gli integrali vengono indicati come *funzione errore*, $\text{erf}(y)$. La definizione della funzione errore può però differire da caso a caso: la variabile y può corrispondere alla variabile t dell'eq. (6.5.3) oppure alla variabile z dell'eq. (6.5.8); gli estremi d'integrazione possono essere $(0, y)$, oppure $(-y, y)$.

6.6 Significato della distribuzione normale

La distribuzione normale riveste un'importanza fondamentale nel calcolo delle probabilità, in quanto costituisce una *distribuzione limite* in molte situazioni di interesse pratico.

Abbiamo già incontrato un problema di analoga natura al § 6.4, quando abbiamo visto che, sotto determinate condizioni, la distribuzione di Poisson può essere considerata come distribuzione limite della distribuzione binomiale.

Fissiamo ora l'attenzione sulla distribuzione normale. In molti casi in cui una variabile aleatoria S può essere decomposta nella somma di un numero sufficientemente grande di variabili aleatorie Y_i , la distribuzione della variabile somma S è di tipo normale.

Le condizioni per le quali la variabile somma S ha una distribuzione di tipo normale sono codificate da un insieme di teoremi, collettivamente indicati come **teorema limite centrale** (o *teorema centrale del calcolo delle probabilità*).

6.6.1 Teorema limite centrale

Riportiamo qui di seguito un enunciato del *teorema limite centrale* particolarmente utile per le applicazioni all'analisi dei dati sperimentali.

Supponiamo che una variabile aleatoria S sia esprimibile come combinazione lineare di n variabili aleatorie indipendenti Y_i

$$S = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \dots + \alpha_n Y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i Y_i. \quad (6.6.1)$$

Supponiamo inoltre che i valori medi m_i e le varianze D_i delle variabili Y_i esistano e siano dello stesso ordine di grandezza; anche i coefficienti α_i siano dello stesso ordine

di grandezza. Si può dimostrare che (salvo restrizioni di scarsa importanza pratica) al crescere del numero n di addendi la distribuzione della variabile aleatoria somma S tende ad una distribuzione gaussiana di valor medio e varianza, rispettivamente,

$$m_S = \sum_i \alpha_i m_i, \quad D_S = \sum_i \alpha_i^2 D_i \quad (6.6.2)$$

indipendentemente dalla forma delle distribuzioni delle variabili aleatorie Y_i .

Esempio 1: Come abbiamo osservato al § 4.3, gli *istogrammi delle misure* di una grandezza fisica tendono spesso ad assumere una forma a campana al crescere del numero delle misurazioni. Fu proprio nel tentativo di dare un'interpretazione teorica a questo fatto sperimentale che Gauss introdusse la distribuzione normale. Il ragionamento di Gauss può essere riformulato nel modo seguente. Il risultato x di una singola misurazione differisce dal valor vero X_v a causa di un errore di entità E : $x = X_v + E$. L'errore E è dovuto all'azione di molteplici fattori casuali, tra di loro indipendenti e di peso equivalente: $E = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \dots$. L'errore E può essere assimilato alla variabile S dell'eq. (6.6.1). La distribuzione di E sarà pertanto normale; normale sarà anche la distribuzione di $x = X_0 + E$.

La possibilità di decomporre l'errore E sulla singola misura nella somma di un numero sufficientemente grande di errori elementari ϵ_i non è sempre evidente, cosicché il ragionamento precedente non ha necessariamente validità generale.

Esempio 2: Consideriamo la *media campionaria* m^* di un insieme di N misurazioni di una grandezza fisica (vedi § 4.3):

$$m^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} x_i.$$

L'espressione di m^* è analoga a quella della variabile S dell'eq. (6.6.1), con $\alpha_i = 1/N$. In questo caso gli addendi x_i hanno tutti la medesima distribuzione, che in genere, ma non necessariamente, è gaussiana (vedi Esempio 1). Il teorema limite centrale assicura che la **distribuzione delle medie campionarie** m^* può comunque essere assunta normale se il numero N di misurazioni che concorrono a formare la singola media m^* è sufficientemente grande.

Esempio 3: Consideriamo una coppia di vettori \vec{u} , \vec{v} di modulo unitario: $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$. I due vettori siano allineati lungo la medesima direzione, ad es. l'asse z ; indichiamo con $Y = |\vec{u} + \vec{v}|$ il modulo della loro somma vettoriale. Supponiamo inoltre che i due vettori possano avere con uguale probabilità

- a) versi opposti $\uparrow\downarrow$ (disposizione antiparallela) $Y = 0$, $\mathcal{P}(Y=0) = 0.5$
- b) versi uguali $\uparrow\uparrow$ (disposizione parallela) $Y = 2$, $\mathcal{P}(Y=2) = 0.5$

Per rendere l'esempio più significativo, possiamo considerare i due vettori \vec{u} e \vec{v} come due dipoli (elettrici o magnetici) appaiati. Il momento di dipolo totale della coppia, misurato nelle opportune unità, è $Y=0$ oppure $Y=2$.

Consideriamo ora un insieme di n coppie indipendenti. Per la coppia i -ma avremo $Y_i=0$ oppure $Y_i=2$. Per l'insieme delle n coppie consideriamo la somma $S = \sum Y_i$. S potrà corrispondere per esempio al momento totale di dipolo elettrico o magnetico. S è una variabile aleatoria che può assumere valori interi multipli di 2. Per un prefissato numero n di coppie è possibile calcolare la distribuzione della variabile aleatoria S , nonché il valor medio m e la varianza D . Nella seguente Tabella sono riportati i valori di probabilità corrispondenti ai possibili valori di S , la media m e la varianza D per n compreso tra 1 e 5.

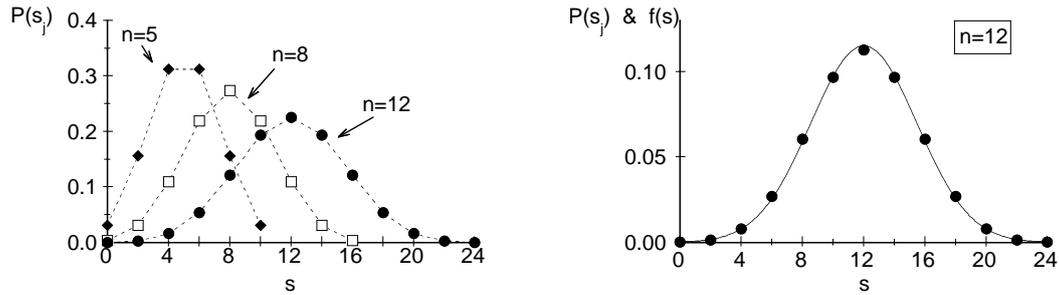


Figura 6.19: A sinistra: grafici delle distribuzioni $P(s)$ della v.a. discreta S definita nell'Esempio 3, per $n=5, 8, 12$. A destra: la distribuzione $P(s)$ (pallini neri) è confrontata con la distribuzione normale $f(s)$ di uguali valor medio e varianza (linea continua); per consentire il confronto, i valori della distribuzione $P(s)$ sono stati divisi per la distanza $\Delta s=2$ tra valori contigui della variabile S .

	$S=$	0	2	4	6	8	10	m	D
$n=1$		1/2	1/2					1	1
$n=2$		1/4	1/2	1/4				2	2
$n=3$		1/8	3/8	3/8	1/8			3	3
$n=4$		1/16	4/16	6/16	4/16	1/16		4	4
$n=5$		1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32	5	5

La Fig. 6.19 mostra che al crescere del numero n di coppie la distribuzione della variabile aleatoria S tende ad assumere una forma a campana di tipo gaussiano.

Esempio 4: Consideriamo un esperimento consistente in n ripetizioni indipendenti della stessa prova, secondo lo schema che al § 6.1 ci ha condotto alla *distribuzione binomiale*. Ad ogni singola prova possiamo associare una variabile aleatoria Y , con la convenzione che per la prova i -ma

$Y_i=0$ se la prova ha esito sfavorevole,

$Y_i=1$ se la prova ha esito favorevole.

La variabile aleatoria k della distribuzione binomiale, che misura il numero di prove ad esito favorevole sul totale di n prove, può pertanto essere espressa come

$$k = \sum_{i=1}^n Y_i,$$

cioè può essere assimilata alla variabile S dell'eq. (6.6.1). Ci aspettiamo pertanto che la distribuzione binomiale della variabile aleatoria k tenda ad assumere una forma gaussiana al crescere di n .

Nota: L'Esempio 3 può essere ricondotto al caso dell'Esempio 4 (distribuzione binomiale) se i vettori \vec{u} e \vec{v} hanno modulo $1/2$, oppure se si identifica la variabile k dell'Esempio 4 con $S/2$ dell'Esempio 3.

6.6.2 Variabili aleatorie discrete e continue

Gli Esempi 3 e 4 mostrano che spesso nella pratica si ha a che fare con la somma di più variabili aleatorie discrete, mentre la distribuzione limite prevista dal teorema centrale limite, cioè la distribuzione normale, è una distribuzione di v.a. continua.

Si ripresenta quindi il problema del confronto tra distribuzioni di v.a. discreta e continua. Avevamo già in parte affrontato questo problema al § 4.3, quando avevamo considerato il rapporto tra istogrammi sperimentali e distribuzioni limite. Vogliamo ora approfondire alcuni aspetti della questione.

Le distribuzioni di v.a. discreta e continua sono intrinsecamente differenti. Per una v.a. discreta la legge di distribuzione dà direttamente la probabilità $\mathcal{P}(k_j)$ per ogni valore k_j della v.a. Per una

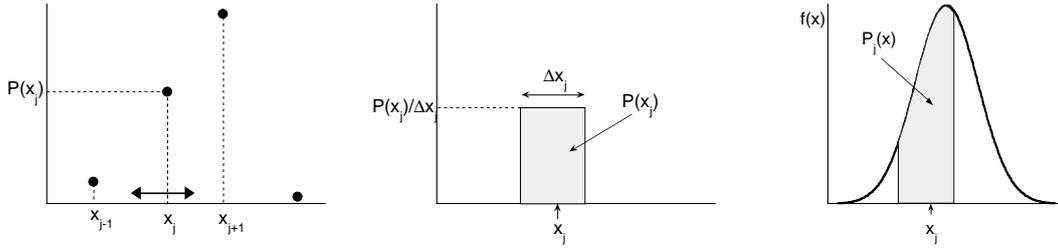


Figura 6.20: Confronto tra una distribuzione di v.a. discreta (a sinistra) e una distribuzione di v.a. continua (a destra).

v.a. continua X la legge di distribuzione è espressa dalla densità di probabilità $f(x)$; la probabilità può essere calcolata per un intervallo di valori Δx integrando la densità di probabilità (vedi eq. 6.2.8).

Per confrontare due distribuzioni, una di v.a. discreta, una di v.a. continua, sono possibili diverse procedure. Le riassumiamo brevemente qui di seguito, facendo riferimento alla Fig. 6.20. (Per semplificare il confronto, indicheremo con x_j anziché k_j i valori della v.a. discreta.)

- Alla distribuzione di v.a. discreta $\mathcal{P}(x_j)$ si sostituisce un istogramma normalizzato in area. Ad ogni valore x_j della v.a. si fa corrispondere una colonna di area pari a $\mathcal{P}(x_j)$ e base Δx_j pari a metà della differenza $x_{j+1} - x_{j-1}$ (Fig. 6.20, al centro). L'istogramma può ora essere confrontato direttamente con la densità di probabilità $f(x)$ di una v.a. continua.
- La procedura precedente risulta semplificata se, come generalmente succede, i valori della v.a. discreta sono tutti equispaziati di Δx . I valori $\mathcal{P}(x_j)/\Delta x$ corrispondono alle altezze delle colonne di un istogramma normalizzato in area, e possono venire confrontati direttamente con la densità di probabilità $f(x)$ di una v.a. continua (vedi Esempio 3, Fig. 6.19). Si noti che nel caso delle distribuzioni binomiale e di Poisson $\Delta x = \Delta k = 1$; il confronto con una densità di probabilità è quindi particolarmente semplice (si vedano le Fig. 6.21 e 6.22).
- L'intervallo di valori della v.a. continua viene diviso in subintervalli corrispondenti ai valori della v.a. discreta, ciascun subintervallo centrato in x_j e di larghezza Δx_j . Indichiamo con $\mathcal{P}_j(x)$ il valore dell'integrale della densità di probabilità $f(x)$ calcolato nel subintervallo j -mo. I valori $\mathcal{P}_j(x)$ sono direttamente confrontabili con i valori $\mathcal{P}(x_j)$.

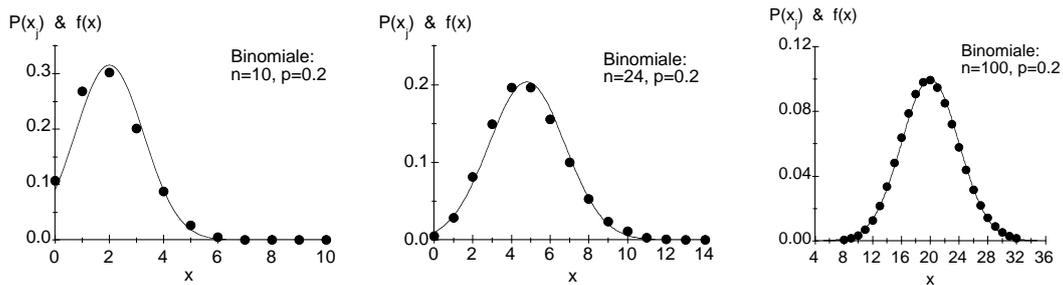


Figura 6.21: Confronto tra distribuzioni binomiali $\mathcal{P}(x_j)$ e gaussiane $f(x)$ di uguali valori medi np e varianze npq . La distribuzione binomiale con $p=0.2$ è asimmetrica; l'asimmetria tuttavia diminuisce al crescere di n , e la forma della distribuzione si avvicina comunque a quella della distribuzione normale. La v.a. discreta della distribuzione binomiale ha valori equispaziati di $\Delta x=1$; è pertanto possibile rappresentare sullo stesso asse verticale la distribuzione $\mathcal{P}(x_j)$ e la densità di probabilità $f(x)$.

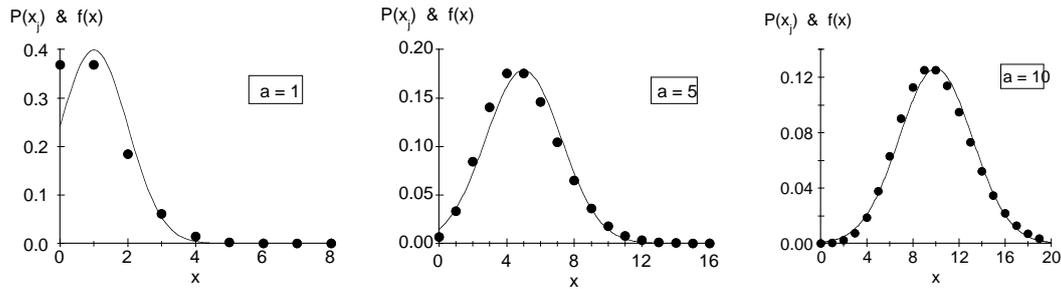


Figura 6.22: Confronto tra distribuzioni di Poisson $\mathcal{P}(x_j)$ e gaussiane $f(x)$ di uguali valori medi e varianze a . La distribuzione di Poisson è asimmetrica; l'asimmetria tuttavia diminuisce al crescere di a , e la forma della distribuzione si avvicina comunque a quella della distribuzione normale. La v.a. discreta della distribuzione di Poisson ha valori equispaziati di $\Delta x=1$; è pertanto possibile rappresentare sullo stesso asse verticale la distribuzione $\mathcal{P}(x_j)$ e la densità di probabilità $f(x)$.

6.6.3 La distribuzione normale come limite di altre distribuzioni

Come conseguenza del teorema limite centrale, la distribuzione normale, sotto opportune condizioni, rappresenta la *limite asintotico di altre distribuzioni*.

La **distribuzione binomiale**, eq. (6.1.1), ha come limite una distribuzione di forma gaussiana quando il numero di prove $n \rightarrow \infty$ e il valor medio np resta finito. L'Esempio 4 mostra come a questa conclusione si possa arrivare in base al teorema centrale limite. Un'illustrazione grafica è fornita in Fig. 6.21.

Al § 6.3 avevamo del resto già verificato che i coefficienti di asimmetria e di appiattimento della distribuzione binomiale tendono a zero per $n \rightarrow \infty$.

La **distribuzione di Poisson**, eq. (6.4.1), ha come limite una distribuzione di forma gaussiana quando il parametro $a \rightarrow \infty$ (ricordiamo che a rappresenta sia valor medio che varianza della distribuzione di Poisson). Un'illustrazione grafica è fornita in Fig. 6.22.

Al § 6.4 avevamo già osservato che i coefficienti di asimmetria e di appiattimento della distribuzione di Poisson tendono a zero per $a \rightarrow \infty$.

I calcoli di probabilità relativi alle distribuzioni binomiale e di Poisson divengono molto laboriosi quando i rispettivi parametri n ed a hanno valori elevati. In tali casi è conveniente sostituire la distribuzione binomiale o di Poisson con la distribuzione normale di uguali valor medio e varianza. Naturalmente si dovrà verificare che la sostituzione garantisce una precisione sufficiente e si dovrà far attenzione alla differenza tra v.a. discrete e continue.

Esempio: Una moneta viene lanciata $n=10$ volte. Vogliamo calcolare la probabilità di ottenere un numero di teste compreso tra $k=3$ e $k=6$. La soluzione esatta si ha usando la *distribuzione binomiale* con $p = q=0.5$:

$$\mathcal{P}(3 \leq k \leq 6) = \sum_{k=3}^6 \binom{10}{k} 0.5^{10} = 0.7734.$$

Una soluzione approssimata si può ottenere sostituendo alla distribuzione binomiale la *distribuzione normale* $f(x)$ che ha lo stesso valor medio $m = np=5$ e la stessa varianza $\sigma^2 = npq=2.5$. Dobbiamo fare attenzione al fatto che passiamo da una distribuzione di v.a. discreta ad una di v.a. continua. Come abbiamo osservato più sopra, ad ogni valore discreto $\mathcal{P}(k_j)$ della distribuzione binomiale possiamo sostituire l'area di una colonna di istogramma. Nel caso in questione, la prima colonna utile, centrata in $k=3$, inizierà al valore $k=2.5$; l'ultima colonna, centrata al valore $k=6$, finirà al valore $k=6.5$.

Passando alla distribuzione normale $f(x)$, la probabilità cercata è data dall'integrale di $f(x)$ calcolato tra gli estremi $x_\alpha=2.5$ e $x_\beta=6.5$, corrispondenti ai valori $z_\alpha=-1.58$ e $z_\beta=0.95$ della variabile standardizzata $z = (x - m)/\sigma$. Usando le Tabelle dell'Appendice D.3 è facile

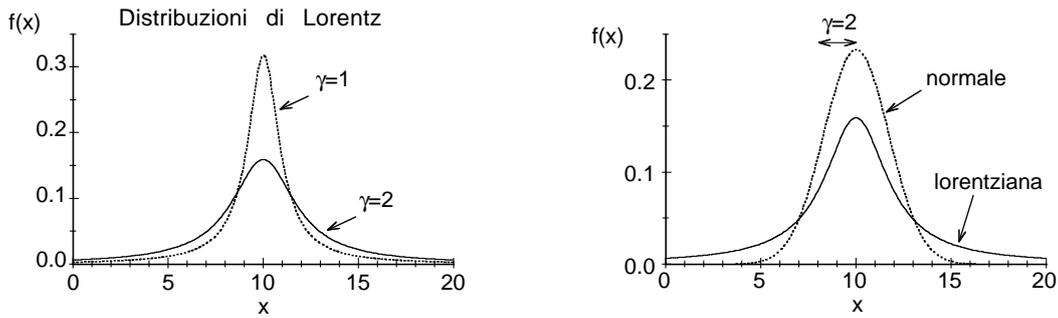


Figura 6.23: A sinistra: confronto tra due distribuzioni di Lorentz di uguale moda $\mu=10$ e diversa semilarghezza: $\gamma=1$ e $\gamma=2$. A destra: confronto tra una distribuzione di Lorentz e una normale con uguale moda $\mu=10$ e semilarghezza $\gamma=2$ (corrispondente, per la distribuzione normale, a $\sigma=1.709$).

calcolare:

$$\mathcal{P}(3 \leq k \leq 6) = \int_{2.5}^{6.5} f(x) dx = \int_{-1.58}^{0.95} \phi(z) dz = 0.7718.$$

Incontreremo più avanti altri casi di distribuzioni che tendono asintoticamente ad una forma gaussiana.

6.7 Altre distribuzioni usate in Fisica

In questo paragrafo esamineremo alcune distribuzioni di variabile aleatoria frequentemente utilizzate in Fisica. Altre distribuzioni interessanti per il trattamento statistico dei dati sperimentali verranno introdotte al Cap. 7.

6.7.1 Distribuzione di Lorentz-Cauchy

La *distribuzione di Lorentz* (detta anche *distribuzione di Cauchy*) è una distribuzione di variabile aleatoria continua la cui densità di probabilità è espressa dalla legge

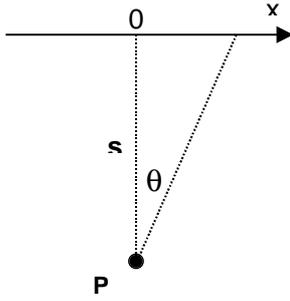
$$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(x - \mu)^2 + \gamma^2}. \quad (6.7.1)$$

La distribuzione lorentziana dipende da due parametri, μ e γ , ed è normalizzata a 1 (vedi Appendice C.8).

L'andamento grafico della distribuzione è evidenziato in Fig. 6.23, a sinistra. È facile rendersi conto che la distribuzione di Lorentz è simmetrica rispetto al valore $x = \mu$ e tende asintoticamente a zero per $x \rightarrow \pm\infty$. Per $x = \mu$ la distribuzione ha il valore massimo, pertanto μ rappresenta la *moda* della distribuzione.

La distribuzione di Lorentz ha interessanti applicazioni in fisica.

Esempio: Un campione di materiale radioattivo si trova in posizione P , a distanza s da una fila di rivelatori disposti lungo una retta (asse x).



I prodotti del decadimento radioattivo vengono emessi in modo isotropo, per cui la densità di probabilità in funzione dell'angolo θ è costante: $\phi(\theta) = C$. Vogliamo determinare la corrispondente densità di probabilità $f(x)$ in funzione della posizione x lungo la linea dei rivelatori. Le variabili θ e x sono legate dalle relazioni:

$$x = s \operatorname{tg} \theta, \quad dx = \frac{dx}{d\theta} d\theta = \frac{s}{\cos^2 \theta} d\theta = \frac{x^2 + s^2}{s} d\theta$$

Dall'uguaglianza degli elementi di probabilità, $\phi(\theta) d\theta = f(x) dx$, si ricava

$$f(x) = \phi(\theta) \frac{d\theta}{dx} = C \frac{s}{x^2 + s^2}.$$

La densità di probabilità $f(x)$ è lorentziana, cioè del tipo dell'eq. (6.7.1), con $\mu=0$, $\gamma=s$, $C=1/\pi$.

Esempio: Nei sistemi fisici descrivibili come oscillatori armonici smorzati e forzati (oscillatori meccanici, circuiti elettrici RLC, etc.) la potenza P assorbita dall'oscillatore in prossimità della frequenza angolare propria di risonanza ω_0 dipende dalla frequenza angolare di eccitazione ω secondo una legge che, per smorzamenti γ sufficientemente piccoli, è approssimabile con una funzione lorentziana

$$P(\omega) \propto \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}.$$

Ad un fenomeno di risonanza viene assimilata anche l'emissione di radiazione elettromagnetica da parte di un atomo eccitato. La radiazione emessa è caratterizzata da una distribuzione in frequenza $f(\omega)$ intorno alla frequenza centrale ω_0 di tipo lorentziano.

Oltre che per le applicazioni fisiche, lo studio della distribuzione di Lorentz (o di Cauchy) è interessante anche da un punto di vista puramente matematico, in quanto la distribuzione presenta peculiari caratteristiche "patologiche".

Non è infatti possibile definire né la *media* né la *varianza* della distribuzione lorentziana, in quanto i corrispondenti integrali di definizione non convergono (vedi Appendice C.8).

Per individuare la *posizione* della distribuzione lorentziana si usa pertanto la *moda* μ . (Il parametro μ viene comunque spesso, seppure impropriamente, chiamato la media della distribuzione di Lorentz.)

Per quantificare la *dispersione* della distribuzione lorentziana si utilizza la *larghezza a metà altezza* (FWHM) Γ . È facile verificare che la funzione (6.7.1) assume i seguenti valori in corrispondenza di $x = \mu$ e $x = \mu + \gamma$:

$$f(\mu) = \frac{1}{\pi\gamma}; \quad f(\mu + \gamma) = \frac{1}{2\pi\gamma} = \frac{1}{2} f(\mu).$$

In altri termini il parametro γ rappresenta la semi-larghezza a metà altezza, per cui la larghezza a metà altezza vale $\Gamma = 2\gamma$.

La distribuzione lorentziana è intrinsecamente diversa dalla distribuzione normale. Si può rendersene conto confrontando una distribuzione lorentziana ed una normale aventi la stessa moda μ e la stessa semilarghezza γ (Fig. 6.23, a destra): la distribuzione lorentziana è più bassa in corrispondenza del valor medio ma assume valori più elevati nelle code (è questo il motivo per cui gli integrali della media e della varianza non convergono).

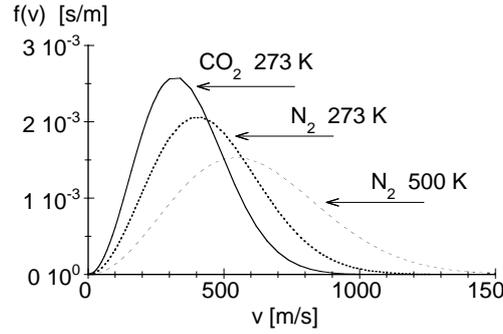


Figura 6.24: Distribuzione di Maxwell-Boltzmann. La figura evidenzia la dipendenza della distribuzione dalla massa delle molecole (le molecole di azoto N_2 hanno massa inferiore alle molecole di anidride carbonica CO_2) e dalla temperatura.

6.7.2 Distribuzione di Maxwell-Boltzmann

Le velocità delle molecole di un gas ideale in condizioni di equilibrio termodinamico sono distribuite secondo la densità di probabilità

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} v^2 \exp \left[-\frac{mv^2}{2kT} \right]. \quad (6.7.2)$$

dove:

m è la massa delle molecole;

T è la temperatura termodinamica espressa in kelvin;

k è la *costante di Boltzmann*, $k=1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$.

Si può verificare (vedi Appendice C.9) che la distribuzione di Maxwell-Boltzmann (6.7.2) è normalizzata a 1. La densità di probabilità $f(v)$ è nulla per $v = 0$ e tende a zero per $v \rightarrow \infty$ (Fig. 6.24). La distribuzione è massima in corrispondenza del valore di velocità

$$v_{pp} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \simeq 1.41 \sqrt{\frac{kT}{m}}.$$

La *velocità media* è

$$v_m = \langle v \rangle = \int_0^\infty v f(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \simeq 1.59 \sqrt{\frac{kT}{m}}.$$

Spesso si fa riferimento anche alla *velocità quadratica media*

$$v_{qm} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \simeq 1.73 \sqrt{\frac{kT}{m}}.$$

La *varianza* della distribuzione è

$$D_v = \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2 = \frac{kT}{m} (3 - 8/\pi).$$

Al crescere della temperatura il massimo della distribuzione si sposta verso valori più alti di velocità e la varianza cresce; a parità di temperatura le molecole più leggere hanno una distribuzione centrata su valori più elevati di velocità e con varianza maggiore (Fig. 6.24).

La distribuzione di Maxwell-Boltzmann qui considerata è un tipico esempio dell'impiego sistematico delle distribuzioni di variabile aleatoria nella termodinamica statistica, cioè nella branca della Fisica che ha lo scopo di interpretare le proprietà termodinamiche macroscopiche dei sistemi in funzione delle proprietà atomiche microscopiche.

6.8 Distribuzioni multivariate

Nei paragrafi precedenti ci siamo occupati di fenomeni casuali che possono venire descritti per mezzo di una sola variabile aleatoria, ed abbiamo sviluppato il formalismo delle distribuzioni di una variabile aleatoria. Si incontrano frequentemente anche fenomeni casuali che richiedono, per la loro descrizione, *due o più variabili aleatorie*. Le distribuzioni relative a due o più variabili aleatorie si dicono **distribuzioni multivariate**.

Esempio: Ripetiamo N volte la misurazione di una grandezza fisica X con risoluzione ΔX sufficientemente bassa da mettere in luce l'effetto degli errori casuali. Preso singolarmente, il risultato x_i di ogni misurazione è una variabile aleatoria dotata della distribuzione limite $f(x)$, generalmente gaussiana. In taluni casi è però utile considerare collettivamente l'insieme dei risultati delle N misurazioni, e chiedersi, ad esempio, quale sia la densità di probabilità relativa ad una data N -pla di valori $x_1, x_2, x_3 \dots x_N$. In questo caso dovremo considerare una distribuzione multivariata relativa ad N variabili aleatorie. (Questo esempio verrà ripreso in considerazione nel Cap. 7).

Le distribuzioni multivariate presentano difficoltà di trattazione maggiori delle distribuzioni di variabile aleatoria singola. In questo paragrafo accenneremo solo ai concetti strettamente necessari all'utilizzo che delle distribuzioni multivariate verrà fatto nel Cap. 7. Ci limiteremo a considerare solo distribuzioni di due variabili aleatorie (distribuzioni *bivariate*); l'estensione al caso di più variabili è generalmente ovvia.

6.8.1 Distribuzioni multivariate per v.a. discrete

Consideriamo due variabili aleatorie discrete H e K .

La variabile H potrà assumere i valori $h_1, h_2, \dots, h_i, \dots$ la variabile K i valori $k_1, k_2, \dots, k_j, \dots$

La distribuzione bivariata è rappresentata dai valori della probabilità per tutte le possibili coppie (h_i, k_j) di valori delle variabili H e K . La distribuzione bivariata può essere rappresentata per mezzo di una tabella come la seguente.

	h_1	h_2	...	h_i	...	\sum_i
k_1	$\mathcal{P}(h_1, k_1)$	$\mathcal{P}(h_2, k_1)$...	$\mathcal{P}(h_i, k_1)$...	$\mathcal{P}(k_1)$
k_2	$\mathcal{P}(h_1, k_2)$	$\mathcal{P}(h_2, k_2)$...	$\mathcal{P}(h_i, k_2)$...	$\mathcal{P}(k_2)$
...
k_j	$\mathcal{P}(h_1, k_j)$	$\mathcal{P}(h_2, k_j)$...	$\mathcal{P}(h_i, k_j)$...	$\mathcal{P}(k_j)$
...
\sum_j	$\mathcal{P}(h_1)$	$\mathcal{P}(h_2)$...	$\mathcal{P}(h_i)$...	1

La riga in alto riporta i valori h_i della v.a. H , la colonna a sinistra riporta i valori k_j della v.a. K . Il corpo della tabella contiene le probabilità $\mathcal{P}(h_i, k_j)$ relative a tutte le coppie di valori (h_i, k_j) . Ovviamente deve valere la condizione di normalizzazione

$$\sum_i \sum_j \mathcal{P}(h_i, k_j) = 1. \quad (6.8.1)$$

La somma delle probabilità di tutte le possibili coppie di valori delle due variabili aleatorie deve essere 1.

La probabilità che la v.a. H abbia un determinato valore h_i , indipendentemente dal valore della v.a. K , è data dalla sommatoria estesa a tutti i possibili valori della v.a. K :

$$\mathcal{P}(h_i) = \sum_j \mathcal{P}(h_i, k_j). \quad (6.8.2)$$

In modo analogo per la v.a. K :

$$\mathcal{P}(k_j) = \sum_i \mathcal{P}(h_i, k_j). \quad (6.8.3)$$

I valori delle probabilità per le singole v.a. $\mathcal{P}(h_i)$ e $\mathcal{P}(k_j)$ vengono generalmente riportati nell'ultima riga (margine inferiore) e nell'ultima colonna (margine destro) della tabella. Le probabilità $\mathcal{P}(h_i)$ e $\mathcal{P}(k_j)$ vengono anche chiamate *probabilità marginali*.

Se la distribuzione bivariata è nota, se cioè sono noti tutti i valori $\mathcal{P}(h_i, k_j)$, allora è possibile ricavare tutte le probabilità marginali $\mathcal{P}(h_i)$ e $\mathcal{P}(k_j)$ utilizzando le eq. (6.8.2) e (6.8.3).

Se invece sono note le probabilità marginali $\mathcal{P}(h_i)$ e $\mathcal{P}(k_j)$, **non** è in generale possibile ricostruire la distribuzione $\mathcal{P}(h_i, k_j)$, a meno che, come vedremo più sotto, le variabili H e K non siano indipendenti.

6.8.2 Distribuzioni multivariate per v.a. continue

Per due variabili aleatorie continue X e Y , la distribuzione bivariata è generalmente espressa mediante una *densità doppia* di probabilità, cioè una funzione $f(x, y)$ di due variabili.

La probabilità che la v.a. X sia compresa nell'intervallo di valori a - b e contemporaneamente la v.a. Y sia compresa nell'intervallo di valori c - d è data dall'integrale doppio

$$\mathcal{P}[a < X < b, c < Y < d] = \int_{x=a}^b \int_{y=c}^d f(x, y) dx dy. \quad (6.8.4)$$

Ovviamente deve valere la condizione di normalizzazione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1. \quad (6.8.5)$$

Anche per le v.a. continue, come per le v.a. discrete, si possono definire le *probabilità marginali*. La densità di probabilità per un generico valore x della v.a. X , indipendentemente dal valore della v.a. Y è:

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy. \quad (6.8.6)$$

In modo analogo per la v.a. Y :

$$h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx. \quad (6.8.7)$$

Se la densità doppia $f(x, y)$ è nota, allora è possibile ricavare le densità marginali $g(x)$ e $h(y)$ utilizzando le eq. (6.8.6) e (6.8.7).

Se invece sono note le densità marginali $g(x)$ e $h(y)$, **non** è in generale possibile ricostruire la densità doppia $f(x, y)$, a meno che, come vedremo qui di seguito, le variabili X e Y non siano indipendenti.

6.8.3 Variabili aleatorie indipendenti

Se le v.a. H e K oppure X e Y sono indipendenti, allora è possibile fattorizzare le distribuzioni bivariate come prodotti delle distribuzioni marginali.

Per v.a. discrete

$$\mathcal{P}[h_i, k_j] = \mathcal{P}[h_i] \mathcal{P}[k_j]. \quad (6.8.8)$$

Per v.a. continue

$$f(x, y) = g(x) h(y). \quad (6.8.9)$$

Capitolo 7

Trattamento statistico dei dati sperimentali

Nel Cap. 4 sono stati introdotti i criteri per l'espressione dell'incertezza nelle misure delle grandezze fisiche nonché alcune metodologie per il trattamento dei dati sperimentali. Un procedimento frequentemente utilizzato nel Cap. 4 è il collegamento tra i valori misurati sperimentalmente e i parametri (valor medio e varianza) di una *distribuzione limite*. Le procedure che consentono di stimare i parametri della distribuzione limite a partire dai risultati di un numero finito di misurazioni sono state introdotte nel Cap. 4 senza una rigorosa giustificazione.

Dopo aver introdotto nei precedenti Capitoli 5 e 6 i concetti di base sulle probabilità e sulle distribuzioni di variabile aleatoria, siamo ora in grado di riprendere l'argomento e di affrontarlo in modo più approfondito. Allo scopo, ci serviremo dei metodi della *statistica*, che consentono di ottenere informazioni sulle proprietà di una popolazione a partire dalle proprietà di un suo campione limitato.

Una volta chiarito il problema basilare della stima dei parametri della distribuzione limite, potremo giustificare alcune procedure frequentemente usate nell'analisi dei dati (medie pesate, propagazione dell'incertezza, regressione lineare, test del chi quadrato).

7.1 Popolazioni e campioni

I concetti di **popolazione** (ingl. *population*) e **campione** (ingl. *sample*) sono basilari nelle scienze statistiche. In questo paragrafo cercheremo di chiarirne il significato, tenendo presenti soprattutto le loro applicazioni al trattamento dei dati sperimentali.

7.1.1 Popolazioni

L'idea di una popolazione costituita da un numero finito di individui è familiare nel campo delle scienze sociali. È immediata l'estensione ad insiemi generici costituiti da un numero finito di elementi.

Se ci si focalizza su una particolare proprietà degli individui di una popolazione (ad es. l'altezza di un insieme di persone, le dimensioni di un insieme di pezzi meccanici, etc.) è possibile costruire una *distribuzione della popolazione* (ingl. *parent population*) relativa a quella data proprietà. Se la proprietà è descrivibile mediante i valori di una opportuna variabile aleatoria, la distribuzione della popolazione sarà una distribuzione di variabile aleatoria.

Esempio 0: I circuiti integrati prodotti in un mese da una fabbrica costituiscono una popolazione finita; ogni circuito integrato è un individuo. Il tempo di funzionamento di ogni circuito è una variabile aleatoria. Tenendo sotto osservazione tutti i circuiti e misurandone il tempo di vita è possibile conoscere la distribuzione della popolazione relativa al tempo di vita. La

distribuzione della popolazione ci consentirà di calcolare la probabilità che un circuito scelto a caso abbia un tempo di funzionamento compreso in un prefissato intervallo.

Per le applicazioni che qui ci interessano, faremo spesso riferimento a popolazioni di natura concettuale, costituite da un *numero infinito di individui*.

Esempio 1: Consideriamo un fenomeno aleatorio in cui un dato evento (ad esempio, l'uscita del "5" nel lancio di un dado) può realizzarsi oppure non realizzarsi con probabilità rispettivamente p e $q = 1 - p$. Il fenomeno può essere descritto da una variabile aleatoria in grado di assumere due valori: $k_1 = 0$ se l'evento non si realizza; $k_2 = 1$ se l'evento si realizza (caso limite della distribuzione binomiale per $n=1$, § 6.1.4). Ogni replica del fenomeno rappresenta un individuo, cui corrisponde un definito valore della v.a.; la popolazione è costituita da tutte le infinite possibili repliche del fenomeno stesso. La distribuzione della popolazione è una distribuzione di probabilità: $\mathcal{P}(k_1) = q$, $\mathcal{P}(k_2) = p$. La media e la varianza della distribuzione sono rispettivamente $m = p$ e $D = pq$ (§ 6.3.5).

Esempio 2: Consideriamo ora un fenomeno aleatorio costituito da n ripetizioni della stessa prova con probabilità p di realizzazione. Il fenomeno è descrivibile mediante la variabile aleatoria discreta K che conta le ripetizioni con esito favorevole. Ogni sequenza di n ripetizioni rappresenta un individuo, cui corrisponde un ben definito valore della v.a.; la popolazione è costituita da tutte le infinite possibili repliche delle n ripetizioni del fenomeno. La distribuzione della popolazione è la *distribuzione binomiale* $\mathcal{P}(k)$ introdotta al § 6.1.

Esempio 3: Le *misurazioni di una grandezza fisica* costituiscono una popolazione potenzialmente infinita. Il risultato di ogni misurazione è una variabile aleatoria. La variabile aleatoria è discreta, per via dell'inevitabile risoluzione della misura (§ 4.2). La distribuzione della popolazione è la *distribuzione limite* introdotta al § 4.3.4. Se l'incertezza è dovuta agli errori casuali, la distribuzione limite assume molto spesso una forma a campana, descrivibile analiticamente mediante una densità di probabilità di v.a. continua $f(x)$ di forma gaussiana (vedi § 6.5 e 6.6).

Esempio 4: Il numero di impulsi dovuti ai raggi cosmici rilevati in un minuto da un contatore Geiger è una variabile aleatoria discreta. Possiamo considerare come singolo individuo ogni misurazione della durata di un minuto, cui corrisponde un ben definito valore della v.a.; la popolazione è costituita da tutte le infinite possibili misurazioni della durata di un minuto. La distribuzione della popolazione è la *distribuzione di Poisson* $\mathcal{P}(k)$ studiata al § 6.4.

7.1.2 Campioni

Studiare sperimentalmente le proprietà di una popolazione esaminando singolarmente tutti i suoi elementi può essere eccessivamente lungo e costoso nel caso di popolazioni finite molto numerose (Esempio 0), ed è sicuramente impossibile nel caso di popolazioni infinite (Esempi 1, 2, 3, 4).

Si usa pertanto selezionare ed esaminare un numero limitato N di elementi della popolazione, cioè un **campione statistico**. La scelta del campione, cioè l'operazione di *campionamento* (ingl. *sampling*), deve garantire che il campione sia effettivamente rappresentativo della popolazione. Una condizione necessaria per la rappresentatività del campione è la casualità della sua scelta. Un *campione casuale* (ingl. *random sample*) sarà tanto più rappresentativo quanto più grande.

La distribuzione dei valori della variabile aleatoria relativa al campione è detta *distribuzione campionaria*. La distribuzione campionaria ha carattere aleatorio, in quanto le sue caratteristiche possono variare variando il campione.

Le caratteristiche della distribuzione della popolazione vengono stimate a partire dalle caratteristiche aleatorie della distribuzione campionaria per mezzo di un procedimento detto di *inferenza statistica*.

Riprendiamo in considerazioni gli esempi fatti in precedenza.

Esempio 0: Per stimare il tempo medio di funzionamento dei circuiti integrati prodotti in un mese da una fabbrica ne viene selezionato in modo casuale un numero relativamente piccolo N , il

campione, che verrà sottoposto ad una prova di durata in fabbrica.

Esempio 1: Per un singolo fenomeno aleatorio (ad esempio il lancio singolo di un dado), un campione è costituito da N repliche indipendenti del fenomeno. L'evento si realizza in n_2^* repliche, non si realizza in n_1^* repliche ($n_1^* + n_2^* = N$). I rapporti $p^* = n_2^*/N$ e $q^* = n_1^*/N$ sono, rispettivamente, le frequenze di realizzazione e non realizzazione dell'evento. La distribuzione campionaria è rappresentata dai due valori $\mathcal{P}^*(k_2) = p^*$ e $\mathcal{P}^*(k_1) = q^*$ delle frequenze. Le frequenze p^* e q^* hanno carattere aleatorio. Al crescere delle dimensioni del campione ($N \rightarrow \infty$) ci si aspetta che le frequenze campionarie tendano ai valori delle probabilità: $p^* \rightarrow p$, $q^* \rightarrow q$. L'esempio è illustrato in Fig. 7.1.

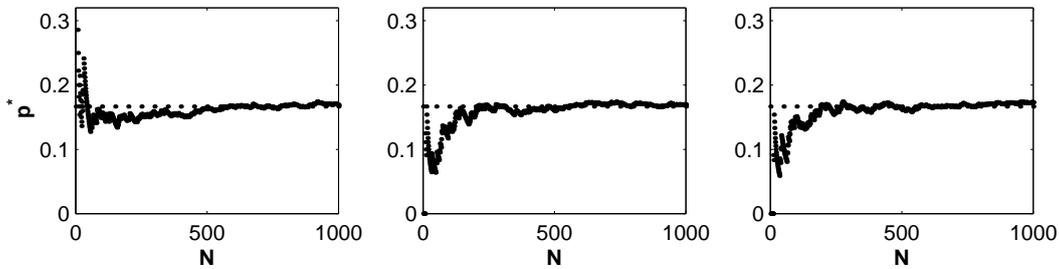


Figura 7.1: Campionamento di un fenomeno aleatorio: l'uscita di una determinata faccia nel lancio di un dado. La popolazione è costituita dagli infiniti lanci possibili; la distribuzione della popolazione è individuata dal valore $p=1/6$ della probabilità (linea tratteggiata orizzontale). I tre grafici si riferiscono a tre distinte sequenze di campionamento e mostrano la frequenza statistica p^* in funzione della dimensione N dei campioni. Al crescere di N la frequenza statistica p^* tende a stabilizzarsi intorno al valore p della probabilità.

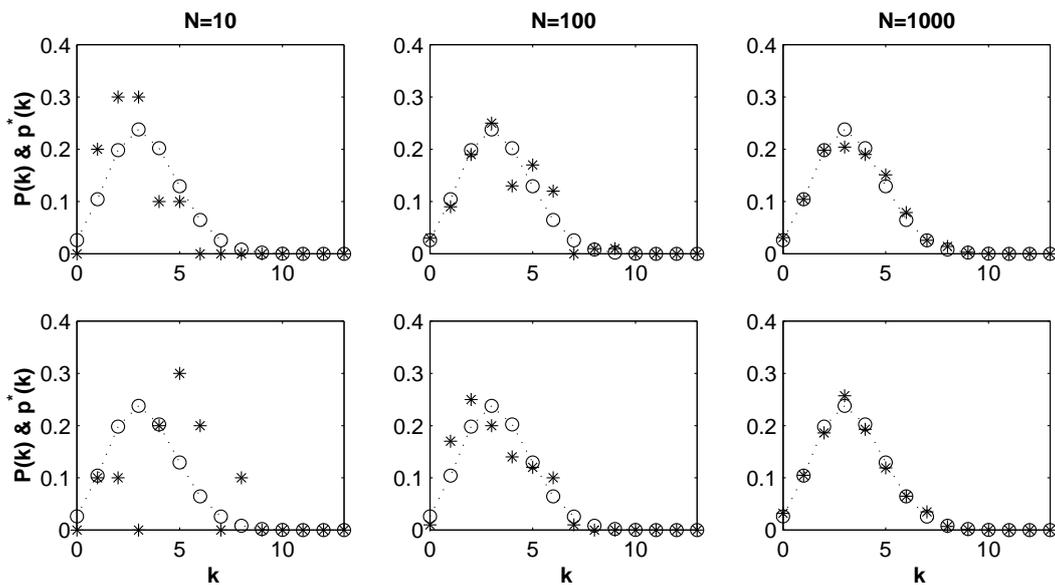


Figura 7.2: Campionamento di una distribuzione binomiale relativa a $n=20$ lanci di un dado ($p=1/6$). La popolazione è costituita dalle infinite possibili sequenze di 20 lanci; la corrispondente distribuzione binomiale è rappresentata dai cerchi nei sei grafici. I grafici si riferiscono a distinti campionamenti, di dimensioni $N=10$ (a sinistra), $N=100$ (al centro), $N=1000$ (a destra). Le distribuzioni campionarie sono rappresentate dagli asterischi.

Esempio 2: Riconsideriamo la *distribuzione binomiale*. Un campione è costituito da N repliche

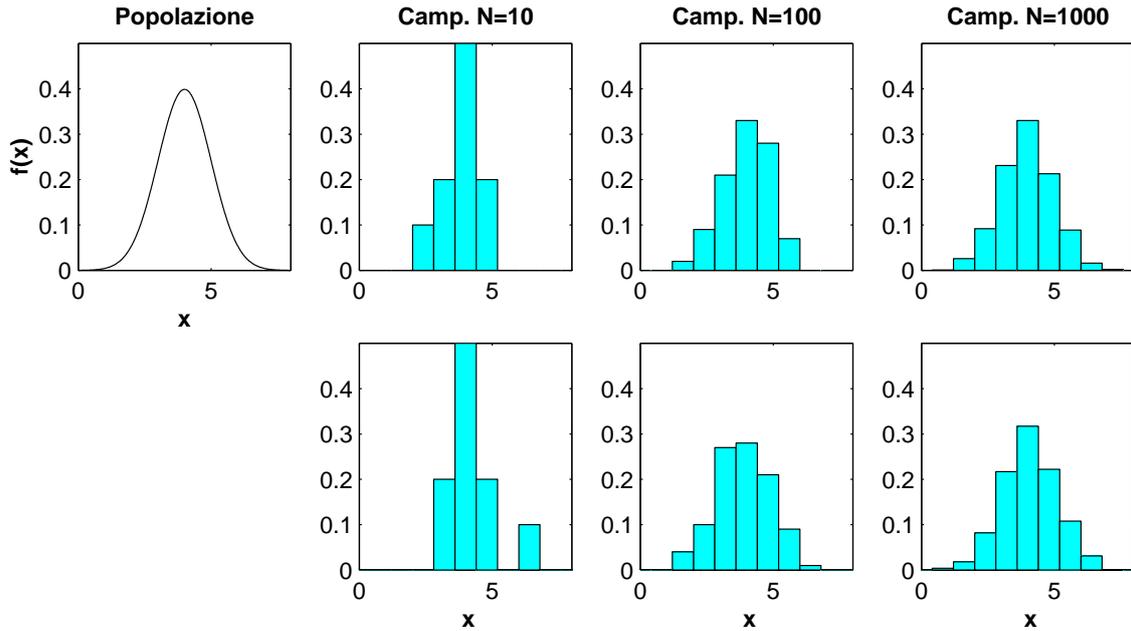


Figura 7.3: Campionamento di una distribuzione normale con $m=4$ e $\sigma=1$. La distribuzione della popolazione è disegnata in alto a sinistra. I sei istogrammi rappresentano distribuzioni campionarie per diverse dimensione del campione: $N=10$ a sinistra, $N=100$ al centro, $N=1000$ a destra.

indipendenti della sequenza di n ripetizioni della singola prova. Ad ogni replica la variabile aleatoria K assumerà un ben definito valore. Per N repliche il generico valore k della variabile aleatoria sarà stato ottenuto $n^*(k)$ volte. La distribuzione campionaria sarà costituita dai valori delle frequenze campionarie: $\mathcal{P}^*(k) = n^*(k)/N$. Al crescere delle dimensioni del campione ($N \rightarrow \infty$) la distribuzione campionaria si avvicina alla distribuzione binomiale della popolazione: $\mathcal{P}^*(k) \rightarrow \mathcal{P}(k)$. L'esempio è illustrato in Fig. 7.2.

Esempio 3: Riconsideriamo ora il problema della *misurazione di una grandezza fisica*. Gli N valori di misura ottenuti sperimentalmente rappresentano un campione della popolazione costituita da tutte le potenzialmente infinite misure possibili. La distribuzione campionaria è generalmente rappresentata sotto forma di un istogramma a \mathcal{N} colonne normalizzato in area. L'area di ogni colonna è proporzionale alla frequenza $p_j^* = n_j^*/N$. Al crescere delle dimensioni del campione ($N \rightarrow \infty$) l'area di ogni colonna si avvicina all'area sottesa dalla distribuzione limite nel corrispondente intervallo Δx_j : $p_j^* \rightarrow p_j = \int f(x) dx$. L'esempio è illustrato in Fig. 7.3. Si riveda in proposito anche la Fig. 4.5 del § 4.3.

Esempio 4: Riconsideriamo infine la *distribuzione di Poisson*. Un campione è costituito da N repliche indipendenti della misurazione dei conteggi per la durata di un minuto. Ad ogni replica la variabile aleatoria K assumerà un ben definito valore. Per N repliche il generico valore k della variabile aleatoria sarà stato ottenuto $n^*(k)$ volte. La distribuzione campionaria sarà costituita dai valori delle frequenze campionarie: $\mathcal{P}^*(k) = n^*(k)/N$. Al crescere delle dimensioni del campione ($N \rightarrow \infty$) ci si aspetta che la distribuzione campionaria si avvicini alla distribuzione di Poisson della popolazione: $\mathcal{P}^*(k) \rightarrow \mathcal{P}(k)$.

Nel seguito considereremo solo campionamenti relativi a *popolazioni infinite* (Esempi 1, 2, 3, 4), con particolare riferimento ai problemi legati alla misurazione di grandezze fisiche (Esempio 3).

Negli Esempi 1, 2, 3 e 4 si è potuto osservare che le distribuzioni campionarie tendono a stabilizzarsi e a differire sempre meno dalle distribuzioni di popolazione quando le dimensioni dei campioni crescono.

Questa convergenza delle distribuzioni campionarie verso le distribuzioni di popolazione ha carat-

tere aleatorio (si parla di *convergenza in probabilità*), ed è codificata da un insieme di teoremi della teoria delle probabilità, collettivamente individuati dall'espressione *legge dei grandi numeri*.

In particolare, la legge dei grandi numeri prevede la convergenza della frequenza statistica di un evento alla sua probabilità (Esempio 1). Questo fatto è alla base della "definizione" statistica di probabilità introdotta al § 5.3.2 (Eq. 5.3.3).

Nota: Nel caso di campionamenti su *popolazioni finite* (esempio 0) è necessario distinguere tra *campionamenti con riposizione* e *campionamenti senza riposizione*. Alcuni risultati che ricaveremo nei paragrafi successivi per le popolazioni infinite sono validi anche per le popolazioni finite nel caso di campionamenti con riposizione ma non nel caso di campionamenti senza riposizione.

7.2 Medie e varianze campionarie

Posizione e dispersione di una distribuzione di popolazione possono essere individuate da due parametri, la **media della popolazione** m (detta anche *valore d'attesa*, in ingl. *expected value*) e la **varianza della popolazione** D . Facendo riferimento al § 6.3 sulle caratteristiche numeriche delle distribuzioni di v.a., ricordiamo che media e varianza di una popolazione sono definite, rispettivamente, come

$$m = \sum_j x_j p_j, \quad D = \sum_j (x_j - m)^2 p_j \quad (7.2.1)$$

per popolazioni discrete (Esempi 1, 2 e 4 del § 7.1) e

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \quad D = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f(x) dx \quad (7.2.2)$$

per le popolazioni continue (Esempio 3 del § 7.1).

(Per uniformità di notazione, indicheremo con x_j anziché k_j i valori delle v.a. discrete.)

Un campione statistico di dimensione N darà origine a N valori x_1, x_2, \dots, x_N della v.a. aleatoria associata alla popolazione. La **media campionaria** m^* e la **varianza campionaria** D^* sono definite dalle medie aritmetiche

$$m^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad D^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*)^2. \quad (7.2.3)$$

In modo alternativo, medie e varianze campionarie possono essere espresse in funzione delle frequenze statistiche p_j^* , dove l'indice j individua i valori distinti x_j per le popolazioni discrete (si veda ad es. la Fig. 7.2) oppure le colonne di un istogramma per le popolazioni continue (si veda ad es. la Fig. 7.3):

$$m^* = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} x_j p_j^*; \quad D^* = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} (x_j - m^*)^2 p_j^* \quad (7.2.4)$$

La somiglianza formale tra le equazioni (7.2.4) e le equazioni (7.2.1) mette in evidenza la relazione che lega le frequenze statistiche p^* alle probabilità p .

7.2.1 Distribuzioni limite di medie e varianze

La media campionaria m^* e la varianza campionaria D^* sono variabili aleatorie continue. Al variare del campione i valori della media e della varianza campionaria cambiano; iterando più volte il campione possiamo quindi costruire gli istogrammi dei valori delle medie e delle varianze campionarie.

Esempio: Consideriamo l'uscita del "5" nel lancio di un dado e descriviamo l'esito per mezzo della variabile aleatoria K : $k_1=0$ se non esce "5", $k_2=1$ se esce "5" (Esempio 1 del § 7.1). La probabilità di ottenere "5" è $p=1/6$. La distribuzione della variabile aleatoria K ha media

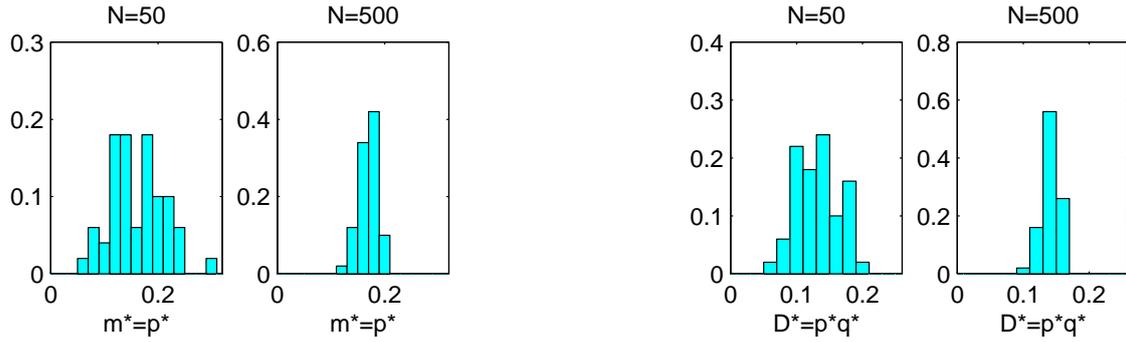


Figura 7.4: Campionamento della popolazione relativa al lancio di un dado. Sono eseguiti campionamenti di $N=50$ e $N=500$ lanci; per ogni campionamento vengono calcolate la media campionaria m^* e la varianza campionaria D^* . Replicando 100 volte ognuno dei due tipi di campionamento si sono ottenuti gli istogrammi relativi alle medie campionarie (a sinistra) e alle varianze campionarie (a destra).

$m = p$ e varianza $D = pq$ (§ 6.3.5). In Fig. 7.4 sono riportati gli istogrammi delle medie campionarie m^* e delle varianze campionarie D^* ottenute da campionamenti di $N=50$ e $N=500$ lanci. Ogni istogramma si basa su 100 repliche dei campionamenti. È evidente che al crescere della dimensione N dei campioni la larghezza degli istogrammi tende a diminuire.

Al crescere del numero di campioni considerati, gli istogrammi delle medie e delle varianze campionarie tendono a forme asintotiche, le *distribuzioni limite delle medie e delle varianze campionarie*. Nel § 4.3, dedicato alla trattazione degli errori casuali, abbiamo già incontrato una distribuzione limite delle medie campionarie, e ne abbiamo considerato alcune proprietà rilevanti (si riveda in proposito la Fig. 4.8 al § 4.3.5).

In questo paragrafo vogliamo studiare in modo più approfondito e generalizzato le proprietà delle distribuzioni limite di medie e varianze campionarie. In particolare troveremo che le caratteristiche numeriche delle distribuzioni delle medie e varianze campionarie sono legate da relazioni semplici alle caratteristiche numeriche della distribuzione di popolazione.

Nella pratica di laboratorio ci si limita in genere ad eseguire un solo campionamento di una popolazione, ottenendo una sola media campionaria m^* e una sola varianza campionaria D^* . Le proprietà generali che ricaveremo in questo § 7.2 saranno utilizzate nel § 7.3, dedicato alla stima dei parametri di una popolazione a partire dai risultati di un solo campionamento.

7.2.2 Relazioni utili

Ricordiamo qui alcune relazioni utili nello studio delle distribuzioni di medie e varianze campionarie, che abbiamo già incontrato al § 4.6.2 (equazioni 4.6.2 e 4.6.3).

Consideriamo due variabili aleatorie X e Y ed una costante reale a . Indichiamo con $\mathbf{m}[\dots]$ e $\mathbf{D}[\dots]$ rispettivamente il valor medio e la varianza. Si dimostra che:

$$\mathbf{m}[aX] = a \mathbf{m}[X] \quad (7.2.5)$$

$$\mathbf{m}[X + Y] = \mathbf{m}[X] + \mathbf{m}[Y] \quad (7.2.6)$$

$$\mathbf{D}[aX] = a^2 \mathbf{D}[X] \quad (7.2.7)$$

$$\mathbf{D}[X + Y] = \mathbf{D}[X] + \mathbf{D}[Y] \quad (7.2.8)$$

Le prime tre relazioni sono sempre vere. L'eq. (7.2.8), relativa alla varianza della somma di due v.a., è invece valida solo se le variabili aleatorie X e Y sono indipendenti. Le eq. (7.2.6) e (7.2.8) sono immediatamente generalizzabili al caso di addizione di più di due variabili aleatorie.

7.2.3 Distribuzione delle medie campionarie

Il **valor medio** della distribuzione delle medie campionarie $\mathbf{m}[m^*]$ è uguale al valor medio m della popolazione. Infatti, facendo uso delle eq. (7.2.5) e (7.2.6),

$$\begin{aligned}\mathbf{m}[m^*] &= \mathbf{m}\left[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N}\right] = \frac{1}{N} \{\mathbf{m}[X_1] + \mathbf{m}[X_2] + \dots + \mathbf{m}[X_N]\} \\ &= \frac{1}{N} \{Nm\} = m.\end{aligned}\quad (7.2.9)$$

La **varianza** della distribuzione delle medie campionarie $\mathbf{D}[m^*]$ è N volte minore della varianza D della popolazione. Infatti, facendo uso delle eq. (7.2.7) e (7.2.8),

$$\begin{aligned}\mathbf{D}[m^*] &= \mathbf{D}\left[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N}\right] = \frac{1}{N^2} \{\mathbf{D}[X_1] + \mathbf{D}[X_2] + \dots + \mathbf{D}[X_N]\} \\ &= \frac{1}{N^2} \{ND\} = \frac{D}{N}.\end{aligned}\quad (7.2.10)$$

In altri termini, la distribuzione delle medie campionarie è centrata in corrispondenza del valor medio della distribuzione della popolazione. La sua larghezza diminuisce al crescere della dimensione N del campione (Fig. 7.4, a sinistra).

Come conseguenza del teorema limite centrale (§ 6.6.1) possiamo inoltre affermare che la distribuzione delle medie campionarie, al crescere delle dimensioni del campione, tende ad assumere la **forma** di una distribuzione normale. Le proprietà della distribuzione delle medie campionarie che abbiamo qui dimostrato erano già state enunciate ed utilizzate al § 4.3.5, in relazione alla trattazione degli errori casuali.

7.2.4 Distribuzione delle varianze campionarie

Calcoliamo il **valor medio** della distribuzione delle varianze campionarie $\mathbf{m}[D^*]$. Allo scopo, partiamo dallo scarto del valore i -mo x_i dalla media campionaria m^* e lo esprimiamo in funzione dello scarto rispetto alla media m della popolazione:

$$(x_i - m^*) = (x_i - m) - (m^* - m) \quad (7.2.11)$$

per cui

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N (x_i - m^*)^2 &= \sum_{i=1}^N (x_i - m)^2 - 2(m^* - m) \sum_{i=1}^N (x_i - m) + N(m^* - m)^2 \\ &= \sum_{i=1}^N (x_i - m)^2 - 2(m^* - m)N(m^* - m) + N(m^* - m)^2 \\ &= \sum_{i=1}^N (x_i - m)^2 - N(m^* - m)^2.\end{aligned}\quad (7.2.12)$$

La varianza campionaria è perciò

$$D^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m)^2 - (m^* - m)^2. \quad (7.2.13)$$

Calcoliamo ora il valor medio della distribuzione delle varianze campionarie:

$$\mathbf{m}[D^*] = \mathbf{m}\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m)^2\right] - \mathbf{m}[(m^* - m)^2]. \quad (7.2.14)$$

Il primo termine a destra è il valor medio del quadrato dello scarto dei valori x_i rispetto alla media della popolazione m , cioè è la varianza della popolazione D .

Il secondo termine a destra è il valor medio del quadrato dello scarto delle medie campionarie m^* rispetto al valor medio della popolazione m ; per l'eq. (7.2.9) $m = \mathbf{m}[m^*]$, per cui il secondo membro corrisponde alla varianza della distribuzione delle medie campionarie $\mathbf{D}[m^*]$, che a sua volta, per l'eq. (7.2.10), è $\mathbf{D}[m^*] = D/N$.

Pertanto

$$\mathbf{m}[D^*] = D - \frac{1}{N}D = \frac{N-1}{N}D. \quad (7.2.15)$$

La distribuzione delle varianze campionarie D^* è centrata intorno ad un valore inferiore alla varianza limite D . La differenza diminuisce al crescere della dimensione N del campione. Si noti che per calcolare la varianza campionaria D^* è necessario avere precedentemente calcolato la media campionaria m^* (eq. 7.2.3). Gli N termini che compaiono nella sommatoria dell'eq. (7.2.12) non sono perciò tutti indipendenti. Il fattore $N-1$ dell'eq. (7.2.15) rappresenta il numero di termini realmente indipendenti nel calcolo della varianza, detto anche *numero di gradi di libertà*.

7.3 Stima dei parametri di una popolazione

Il problema fondamentale dell'*inferenza statistica* consiste nel ricavare il massimo di informazione su una popolazione a partire da un suo campionamento. Abbiamo già affrontato questo problema nel § 4.3, in connessione con la trattazione degli errori casuali: lì avevamo introdotto delle procedure per risalire da un istogramma sperimentale ai parametri della popolazione limite dei valori di misura. Vogliamo ora affrontare il problema da un punto di vista più generale ed in modo più approfondito.

La **forma analitica** della distribuzione di una popolazione (ad esempio gaussiana, binomiale, poissoniana, etc.) viene generalmente desunta da considerazioni teoriche o ipotizzata in base all'esperienza nel trattamento dei dati sperimentali. Studieremo più avanti, al § 7.6, una metodologia che consente di valutare in termini probabilistici la plausibilità di un'ipotesi relativa alla forma di una distribuzione: si tratta di una procedura basata sul metodo del *chi quadrato* già introdotto nel Capitolo 4.

Una volta stabilita la forma della distribuzione di popolazione, i suoi **parametri** (valor medio, varianza, coefficiente di asimmetria, etc.) possono venire stimati a partire dai dati sperimentali che costituiscono il campione. Indichiamo con λ_s un qualsiasi parametro di popolazione, con λ_s^* il corrispondente parametro campionario.

Esempio 1: La distribuzione limite dei valori di una grandezza fisica misurata in presenza di errori casuali può venire spesso modellizzata mediante una distribuzione normale (§ 4.3). I parametri di popolazione λ_1 e λ_2 sono rispettivamente il valor medio m e la varianza $D = \sigma^2$ della distribuzione limite. I corrispondenti parametri campionari λ_1^* e λ_2^* sono rispettivamente la media m^* e la varianza D^* dell'istogramma delle misure effettuate.

Esempio 2: L'istogramma di misura di una grandezza fisica presenta un andamento bimodale, caratterizzato da due massimi distinti. Si fa l'ipotesi che la grandezza fisica possa assumere due distinti valori, e che la misura di ciascuno dei due valori abbia una distribuzione di tipo gaussiano. Si assume pertanto una distribuzione di popolazione del tipo

$$f(x) = A_1(1/\sigma_1\sqrt{2\pi})\exp[(x-m_1)^2/2\sigma_1^2] + A_2(1/\sigma_2\sqrt{2\pi})\exp[(x-m_2)^2/2\sigma_2^2]$$

I parametri di popolazione sono in questo caso 6:

$$\lambda_1 = A_1, \lambda_2 = m_1, \lambda_3 = \sigma_1, \lambda_4 = A_2, \lambda_5 = m_2, \lambda_6 = \sigma_2.$$

I parametri campionari λ_s^* sono variabili aleatorie, in quanto dipendono dai valori x_1, x_2, \dots, x_N , pure essi aleatori, che costituiscono il campione. Non è quindi possibile conoscere in modo certo i parametri di una popolazione a partire da un campionamento finito. Esistono però delle procedure che consentono di *stimare* i parametri di popolazione a partire da un campione.

Indicheremo con $\tilde{\lambda}_s$ una stima (ingl. *estimate*) del parametro λ_s ottenuta a partire da un campione.

7.3.1 Proprietà di una stima

Per ottenere una stima $\tilde{\lambda}_s$ di un parametro λ_s a partire dagli N valori di un campionamento si possono seguire procedure differenti. In ogni caso, qualunque procedura si scelga, la stima $\tilde{\lambda}_s$ sarà una *variabile aleatoria*: iterando il campione, varierà il valore di $\tilde{\lambda}_s$ e potremo quindi parlare di una distribuzione delle stime $\tilde{\lambda}_s$. Per confrontare differenti possibili procedure di stima di un parametro e stabilire dei criteri di confronto e di scelta, vengono definite alcune proprietà di cui può godere una stima.

Una stima è detta:

a) **consistente** se

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_s = \lambda_s,$$

cioè se aumentando indefinitamente la dimensione N del campione la stima $\tilde{\lambda}_s$ ha come valore limite proprio il parametro λ_s della popolazione;

b) **corretta** (ingl. *unbiased*) se $\mathbf{m}[\tilde{\lambda}_s] = \lambda_s$, cioè se il valor medio della distribuzione campionaria dei valori $\tilde{\lambda}_s$ corrisponde al parametro λ_s della popolazione;

c) **efficace** se $\mathbf{D}[\tilde{\lambda}]$ è minima, cioè se, tra tutte le possibili procedure di stima del parametro λ_s , quella scelta è caratterizzata dall'aver la distribuzione con la minima varianza.

Esempio: Consideriamo una qualsiasi distribuzione di popolazione e fissiamo l'attenzione sul parametro $\lambda_1 = m$, cioè sul valor medio. Una possibile stima del parametro m a partire da un campione di dimensione N è costituita dalla media campionaria m^* :

$$\tilde{m} = m^* = \sum x_i / N. \quad (7.3.1)$$

Per quanto abbiamo visto al § 7.2 (eq. 7.2.9), questa stima è consistente e corretta; si può dimostrare che è anche efficace.

Esempio: Consideriamo ancora una qualsiasi distribuzione di popolazione e fissiamo ora l'attenzione sul parametro $\lambda_2 = D$, cioè sulla varianza. Una possibile stima del parametro D a partire da un campione di dimensione N è costituita dalla varianza campionaria: $\tilde{D} = D^*$. Per quanto abbiamo visto al § 7.2 (eq. 7.2.15), questa stima è consistente ma non corretta, in quanto il valor medio della distribuzione delle varianze campionarie non coincide con la varianza di popolazione D . Una stima consistente e corretta della varianza è invece

$$\tilde{D} = \frac{N}{N-1} D_x^*. \quad (7.3.2)$$

7.3.2 Criterio di massima verosimiglianza

Un metodo utilizzato frequentemente per stimare i parametri di una popolazione a partire da un campione si basa sul *criterio di massima verosimiglianza* (ingl. *maximum likelihood*).

Secondo il criterio di massima verosimiglianza, la migliore stima dei parametri di una popolazione è quella che rende massima la probabilità del campione su cui la stima stessa si basa.

Per capire meglio il concetto, considereremo il caso particolare di una distribuzione di v.a. continua. L'estensione a distribuzioni di v.a. discrete è immediata. Ulteriori applicazioni verranno incontrate nei paragrafi successivi.

La distribuzione $f(x)$ di una popolazione dipende da un certo numero di parametri λ_s ; ad esempio, una distribuzione normale dipende da due parametri, $\lambda_1 = m$ e $\lambda_2 = \sigma$.

Cosa succederebbe se la distribuzione $f(x)$ della popolazione fosse perfettamente nota, e quindi fossero noti a priori i valori dei parametri λ_s ? In questo caso conosceremmo la densità di probabilità in corrispondenza di qualsiasi valore x della variabile aleatoria. Supponiamo di voler eseguire un campionamento di dimensione N (ad esempio N misurazioni di una grandezza fisica). La densità di probabilità di ottenere una ben definita N -pla di valori x_1, x_2, \dots, x_N è data da una distribuzione

multivariata $g(x_1, x_2, \dots, x_N)$ (vedi § 6.8). Se i risultati dei singoli campionamenti sono tra di loro *indipendenti* (ad esempio se le misure della grandezza fisica sono indipendenti) la distribuzione $g(x_1, x_2, \dots, x_N)$ può essere espressa come prodotto di N fattori $f(x)$:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_N) = f(x_1) f(x_2) \dots f(x_N). \quad (7.3.3)$$

La funzione $g(x_1, x_2, \dots, x_N)$ viene anche detta *funzione di verosimiglianza*.

Passiamo ora a considerare il caso realistico in cui siano noti gli N valori x_1, x_2, \dots, x_N del campione e si vogliano stimare i parametri λ_s della popolazione, a priori incogniti. La funzione verosimiglianza dell' Eq. (7.3.3) dipende ora dai valori degli n parametri λ_s della distribuzione di popolazione: $g(x_1, x_2, \dots, x_N; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Secondo il criterio di massima verosimiglianza, la migliore stima dei parametri λ_s è data da quei valori $\tilde{\lambda}_s$ che massimizzano la densità di probabilità di ottenere proprio l' N -pla x_1, x_2, \dots, x_N :

$$\mathbf{max} [g(x_1, x_2, \dots, x_N; \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)] \Rightarrow \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_n. \quad (7.3.4)$$

A titolo di esempio, supponiamo di sapere che la distribuzione di popolazione ha forma normale

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (7.3.5)$$

e cerchiamo la migliore stima dei parametri $\lambda_1 = m$ e $\lambda_2 = \sigma$ a partire da un campione di N valori x_1, x_2, \dots, x_N . La densità di probabilità di ottenere proprio i valori x_1, x_2, \dots, x_N è data dall'eq. (7.3.3), cioè

$$g(x_1, x_2, \dots, x_N; m, \sigma) = \frac{1}{\sigma^N (\sqrt{2\pi})^N} \exp \left[-\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - m)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (7.3.6)$$

dove i valori x_1, x_2, \dots, x_N sono noti e le incognite sono rappresentate dai parametri m e σ .

Le migliori stime \tilde{m} e $\tilde{\sigma}$ di m e σ sono i valori che massimizzano la densità multivariata $g(x_1, x_2, \dots, x_N; m, \sigma)$. Per trovarli, imponiamo che si annullino le derivate parziali prime

$$\frac{\partial g(x_1 \dots x_N; m, \sigma)}{\partial m} = 0; \quad \frac{\partial g(x_1 \dots x_N; m, \sigma)}{\partial \sigma} = 0 \quad (7.3.7)$$

e siano negative le derivate seconde. È facile verificare che si ottiene:

$$\tilde{m} = \frac{1}{N} \sum x_i = m^*; \quad \tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum (x_i - m)^2}. \quad (7.3.8)$$

Si confrontino le eq. (7.3.8) con le eq. (7.3.1) e (7.3.2). È immediato verificare che il criterio di massima verosimiglianza fornisce una stima corretta della media, $\tilde{m} = m^*$. La stima $\tilde{\sigma}$ dell'eq. (7.3.8) si basa sugli scarti rispetto al parametro m , non noto; se però si sostituisce m con la sua stima m^* si ottiene una stima consistente ma non corretta di σ : una stima corretta è data dall'eq. (7.3.2).

7.3.3 Media pesata

Nel § 4.4 abbiamo introdotto il metodo della *media pesata* per sintetizzare i risultati di due o più misure di una stessa grandezza fisica, purché tra di loro consistenti. Siamo ora in grado di dare una giustificazione alla procedura della media pesata, basata sul *criterio di massima verosimiglianza*.

Supponiamo di avere i risultati di due diverse misurazioni di una grandezza fisica, espressi nella forma

$$X_A \pm \delta X_A, \quad X_B \pm \delta X_B \quad (7.3.9)$$

e supponiamo inoltre che:

- a) i risultati siano *consistenti*, cioè che la differenza tra X_A e X_B sia confrontabile o inferiore alla somma delle incertezze;

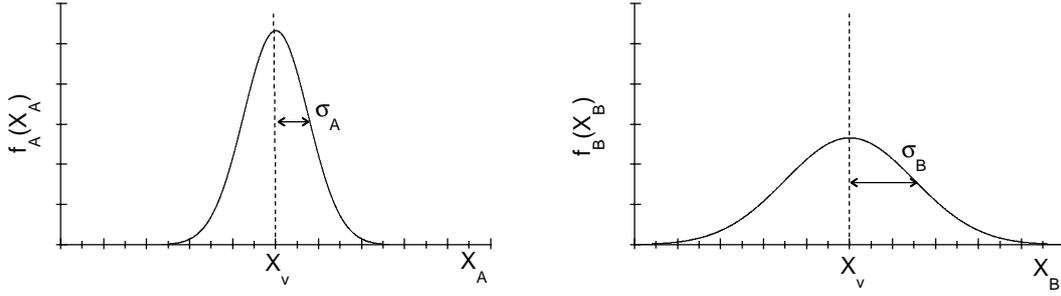


Figura 7.5: Distribuzioni di popolazione relative alla misurazione della stessa grandezza X con due diverse procedure, A e B , affette da errori casuali in modo diverso.

- b) le incertezze siano dovute solo ad errori casuali e siano pertanto espresse come scarti quadratici medi delle distribuzioni limite gaussiane delle medie campionarie:

$$\delta X_A = \sigma_A [m_A^*], \quad \delta X_B = \sigma_B [m_B^*]. \quad (7.3.10)$$

Vogliamo sintetizzare i risultati delle due misurazioni in un'unica espressione $X = X_0 \pm \delta X_0$.

Per giustificare la media pesata in base al criterio di massima verosimiglianza, seguiamo la stessa linea di ragionamento usata nel § 7.3.2. Se il valore vero X_v della grandezza fosse noto, la densità di probabilità di ottenere il valore X_A a seguito di un campionamento eseguito con la procedura A sarebbe

$$f_A(X_A) = \frac{1}{\sigma_A \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(X_A - X_v)^2}{2\sigma_A^2} \right] \quad (7.3.11)$$

mentre la densità di probabilità di ottenere il valore X_B a seguito di un campionamento eseguito con la procedura B sarebbe

$$f_B(X_B) = \frac{1}{\sigma_B \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(X_B - X_v)^2}{2\sigma_B^2} \right]. \quad (7.3.12)$$

Le eq. (7.3.11) e (7.3.12) esprimono le distribuzioni limite delle medie campionarie: entrambe sono centrate in X_v ma la loro larghezza dipende dalla rispettiva procedura di misura (per semplificare la scrittura, con σ si intende $\sigma[m^*]$). Possiamo considerarle come le distribuzioni di due distinte popolazioni: la popolazione delle misure effettuate con la procedura A e la popolazione delle misure effettuate con la procedura B (Fig. 7.5).

La densità di probabilità di ottenere contemporaneamente il valore X_A nella procedura A e il valore X_B nella procedura B sarebbe il prodotto delle due densità $f_A(X_A)$ e $f_B(X_B)$:

$$g(X_A, X_B) = \frac{1}{\sigma_A \sigma_B 2\pi} \exp \left[-\frac{(X_A - X_v)^2}{2\sigma_A^2} - \frac{(X_B - X_v)^2}{2\sigma_B^2} \right]. \quad (7.3.13)$$

Torniamo ora al caso reale, in cui sono noti i valori X_A e X_B , mentre è incognito il valore X_v . Secondo il criterio di massima verosimiglianza, la migliore stima di X_v è il valore \tilde{X}_v che massimizza la densità di probabilità $g(X_A, X_B; X_v)$ dell'eq. (7.3.13). Imponendo

$$\frac{dg(X_A, X_B; X_v)}{dX_v} = 0 \quad (7.3.14)$$

e introducendo, per semplicità di notazione, i *pesi*

$$w_A = \frac{1}{(\delta X_A)^2} = \frac{1}{\sigma_A^2}, \quad w_B = \frac{1}{(\delta X_B)^2} = \frac{1}{\sigma_B^2} \quad (7.3.15)$$

si ritrova facilmente l'espressione della media pesata (eq. 4.4.3, a sinistra)

$$\tilde{X}_v = X_0 = \frac{X_A w_A + X_B w_B}{w_A + w_B}. \quad (7.3.26)$$

È immediata la generalizzazione al caso di più misure $X_i \pm \delta X_i$ (eq. 4.4.4, a sinistra).

Nota: Nel caso in cui l'incertezza di una o più misure non sia dovuta ad errori casuali e non sia quindi riconducibile allo scarto tipo di una distribuzione gaussiana, la trattazione basata sul principio di massima verosimiglianza non è più rigorosamente valida. Può comunque venire utilizzata come procedura approssimata, purché si abbia cura di esprimere le incertezze sempre nei termini di uno scarto tipo, secondo le indicazioni del § 4.5.

7.4 Incertezza e intervallo di confidenza

Nel § 4.3 ci siamo occupati dell'influenza degli errori casuali sulle misure delle grandezze fisiche: abbiamo convenuto di sintetizzare l'esito di N misurazioni ripetute con l'espressione $X = X_0 \pm \delta X$, dove $X_0 = m^*$ e $\delta X = \sigma[m^*]$ (si rivedano in proposito le eq. 4.3.21 e 4.3.24). Appoggiandoci ai concetti di popolazione e campione introdotti in questo Capitolo 7, siamo ora in grado di dare una giustificazione più rigorosa per quella procedura e di chiarirne alcuni aspetti delicati.

7.4.1 Popolazioni e campioni

Richiamiamo innanzitutto alcuni concetti già espressi in precedenza.

Le N misure effettuate di una grandezza fisica possono essere considerate un campione di una popolazione infinita. La distribuzione di questa popolazione (cioè la distribuzione limite dei valori di singola misura) ha spesso, ma non necessariamente, forma normale, con media m e scarto tipo σ . Come abbiamo osservato al § 4.3, se la distribuzione limite fosse nota, la sua media m costituirebbe il *valor vero* X_v della grandezza fisica.

A partire dal campione di N misure è possibile calcolare la media campionaria m^* . La media campionaria m^* è una variabile aleatoria, dipendente dal campione, e può essere considerata un elemento di una popolazione infinita, la popolazione delle medie campionarie. Della distribuzione limite delle medie campionarie sappiamo che:

- a) è centrata in corrispondenza del valor vero: $\mathbf{m}[m^*] = m$;
- b) per N sufficientemente grande, è con buona approssimazione gaussiana, in virtù del teorema centrale limite;
- c) il suo scarto tipo $\sigma[m^*]$ è legato allo scarto tipo σ della distribuzione limite di misura singola dalla relazione $\sigma[m^*] = \sigma/\sqrt{N}$.

7.4.2 Intervallo di probabilità e intervallo di confidenza

Facciamo l'ipotesi, puramente astratta, che la popolazione dei valori di misura sia perfettamente nota. In tal caso sarebbe noto il valore vero della misura: $X_v = m = \mathbf{m}[m^*]$. Non solo; la conoscenza della popolazione ci consentirebbe di rispondere alla seguente domanda: se eseguiamo un campionamento di N misure, qual è la probabilità che la corrispondente media campionaria m^* cada in un intorno del valore vero di larghezza prefissata? È utile considerare intervalli di valori m^* centrati sul valor vero m e misurare la larghezza di questi intervalli prendendo come unità di misura lo scarto tipo $\sigma[m^*]$ (Fig. 7.6, a sinistra). Un intervallo di questo genere è definito dalla relazione

$$m - k \sigma[m^*] < m^* < m + k \sigma[m^*] \quad (7.4.1)$$

equivalente a

$$|m^* - m| < k \sigma[m^*], \quad (7.4.2)$$

ovvero

$$\frac{|m^* - m|}{\sigma[m^*]} < k. \quad (7.4.3)$$

Il parametro k è detto *fattore di copertura* (ingl. *coverage factor*). Poiché la distribuzione delle medie campionarie m^* è con buona approssimazione normale, si può introdurre la corrispondente

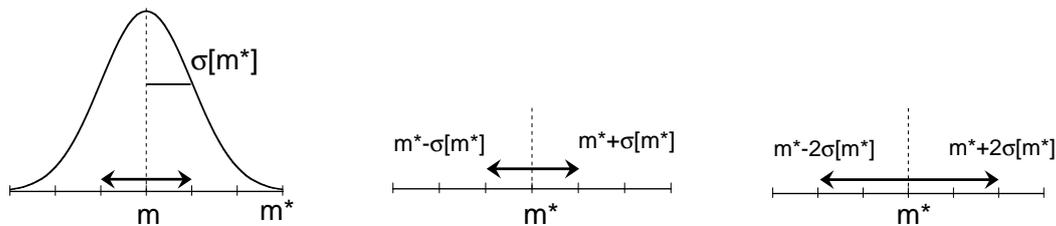


Figura 7.6: A sinistra: distribuzione delle medie campionarie m^* ; la freccia \leftrightarrow indica l'intervallo di probabilità centrato sulla media m e di semi-larghezza $\sigma[m^*]$. Al centro e a destra: intervalli di confidenza centrati sul valore sperimentale m^* , di semi-larghezza rispettivamente $\sigma[m^*]$ e $2\sigma[m^*]$.

variabile normale standardizzata z (§ 6.5.D):

$$z = \frac{m^* - m}{\sigma[m^*]}, \quad (7.4.4)$$

ed esprimere l'eq. (7.4.3) nella forma

$$|z| < k.$$

La probabilità β che la media campionaria m^* soddisfi la condizione espressa dall'eq. (7.4.1) per un prefissato valore $k = k_\beta$ può essere pertanto calcolata utilizzando l'integrale della distribuzione normale standardizzata (vedi le tabelle dell'Appendice D.3):

$$\beta = \mathcal{P} \{ |z| < k_\beta \} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k_\beta}^{+k_\beta} \exp[-z^2/2] dz. \quad (7.4.5)$$

Ad esempio, se $k_\beta = 1$, la probabilità è $\beta = 68.27\%$. Viceversa, prefissato un valore di probabilità β , usando ancora le tabelle dell'Appendice D.3 è possibile calcolare il valore del parametro k che soddisfa l'eq. (7.4.5). Ad esempio, la probabilità $\beta = 90\%$ si ottiene per $k_\beta = 1.64$.

Si noti che, nel caso astratto qui considerato, il valore fisso $X_v = m$ e lo scarto tipo $\sigma[m^*]$ sono noti, la variabile aleatoria m^* è incognita. L'eq. (7.4.1) rappresenta un'applicazione diretta della teoria delle probabilità. L'intervallo di valori compreso tra $m - k\sigma[m^*]$ e $m + k\sigma[m^*]$ è un *intervallo di probabilità*.

Passiamo a considerare un caso reale. Facciamo un campionamento di N misure e calcoliamo la media campionaria m^* . La situazione è ribaltata rispetto al caso astratto considerato sopra: ora il valore fisso $X_v = m$ è incognito, mentre è noto il valore della variabile aleatoria m^* .

Come abbiamo visto al § 7.3, un campionamento finito consente comunque di fare una stima \tilde{m} del valor vero m . Una stima consistente e corretta di m è rappresentata dalla media campionaria:

$$\tilde{m} = m^* = \frac{1}{N} \sum x_i. \quad (7.4.6)$$

Si tratta di una *stima puntuale*, cioè costituita da un ben definito valore numerico m^* . La stima puntuale del valor vero $\tilde{m} = m^*$ ha evidentemente un valore limitato, in quanto m^* è una variabile aleatoria, dipendente dal campione.

Una stima più significativa deve tenere conto in modo opportuno del grado di aleatorietà del valore $\tilde{m} = m^*$. Allo scopo, è necessario cercare di rispondere alla seguente domanda: qual è la probabilità che un intervallo centrato sulla media campionaria m^* e di larghezza prefissata contenga il valore vero $X_v = m$? Si noti che l'incognita $X_v = m$ non è una variabile aleatoria. Non sarebbe pertanto corretto parlare di intervallo di probabilità; si parla invece di *intervallo di confidenza* (ingl. *confidence interval*), e la corrispondente probabilità è detta *probabilità di confidenza* o di *copertura* (ingl. *coverage probability*) o anche *livello di confidenza* (ingl. *confidence level*). L'intervallo di confidenza è schematicamente illustrato in Fig. 7.6, al centro e a destra.

Per chiarire le idee procedendo con gradualità, facciamo ancora un'ipotesi astratta: supponiamo cioè che, pur essendo $X_v = m$ incognito, sia noto lo scarto tipo σ della distribuzione di popolazione.

In tale caso, essendo noto anche $\sigma[m^*]$, un intervallo di confidenza sarà definito dalla relazione

$$m^* - k \sigma[m^*] < m < m^* + k \sigma[m^*], \quad (7.4.7)$$

analiticamente equivalente all'eq. (7.4.2):

$$|\tilde{m} - m| < k \sigma[m^*].$$

Il fattore di copertura k dell'eq. (7.4.7), nella misura in cui la distribuzione delle medie campionarie può essere considerata gaussiana, sarà ancora riconducibile alla corrispondente variabile normale standardizzata (7.4.4).

Ricordiamo che proprio lo scarto tipo della distribuzione delle medie campionarie $\sigma[m^*]$ è per convenzione assunto come incertezza δX della misura. Nelle ipotesi che $\sigma[m^*]$ fosse noto e che la distribuzione delle medie campionarie fosse perfettamente gaussiana, potremmo quindi calcolare il livello di confidenza utilizzando ancora l'eq. (7.4.5). Ad esempio, la probabilità β che l'intervallo di confidenza definito da $\pm\sigma[m^*]$ contenga il valore vero $X_v = m$ sarebbe del 68.27 %.

7.4.3 Valutazione approssimata del livello di confidenza

Nella realtà, anche lo scarto tipo $\sigma[m^*]$, così come il valor vero $X_v = m$, è incognito. Un campionamento finito consente solo di *stimare* il valore di $\sigma[m^*]$:

$$\tilde{\sigma}[m^*] = \frac{\tilde{\sigma}}{\sqrt{N}} = \frac{\sigma^*}{\sqrt{N-1}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum (x_i - m^*)^2}. \quad (7.4.8)$$

La stima di $\sigma[m^*]$ espressa dall'eq. (7.4.8) ha carattere aleatorio, in quanto dipende dal particolare campionamento. L'aleatorietà della stima è tanto più grande quanto più piccolo è il numero N di misure.

L'espressione (7.4.7) dell'intervallo di confidenza sarà sostituita dalla relazione

$$m^* - k \tilde{\sigma}[m^*] < m < m^* + k \tilde{\sigma}[m^*], \quad (7.4.9)$$

equivalente a

$$\frac{|m^* - m|}{\tilde{\sigma}[m^*]} < k. \quad (7.4.10)$$

Il fattore di copertura k è riconducibile ad una nuova variabile aleatoria

$$t = \frac{m^* - m}{\tilde{\sigma}[m^*]} \quad (7.4.11)$$

che non coincide con la variabile normale standardizzata (7.4.4) in quanto $\tilde{\sigma}[m^*]$ è solo una stima aleatoria di $\sigma[m^*]$.

Calcolare il livello di confidenza utilizzando ancora l'eq. (7.4.5), previa sostituzione di $\sigma[m^*]$ con la stima $\tilde{\sigma}[m^*]$, significa approssimare la variabile t dell'eq. (7.4.11) con la variabile normale standardizzata z dell'eq. (7.4.4). Questa sostituzione conduce a valori di probabilità approssimati per eccesso, come vedremo nel successivo § 7.4.4. Come ci si può ragionevolmente aspettare, l'approssimazione è però tanto migliore quanto più grande è il numero N di misure. Al crescere di N , infatti, non solo la distribuzione delle medie campionarie m^* è sempre più vicina alla distribuzione gaussiana, ma anche diminuisce la dispersione della stima $\tilde{\sigma}[m^*]$ rispetto al valore $\sigma[m^*]$, e la variabile t è sempre più vicina alla variabile z .

7.4.4 Valutazione esatta del livello di confidenza; la distribuzione di Student

Una valutazione esatta della probabilità di confidenza a partire da un campionamento finito di N misure può essere fatta solo nel caso in cui la distribuzione dei valori di misura singola sia

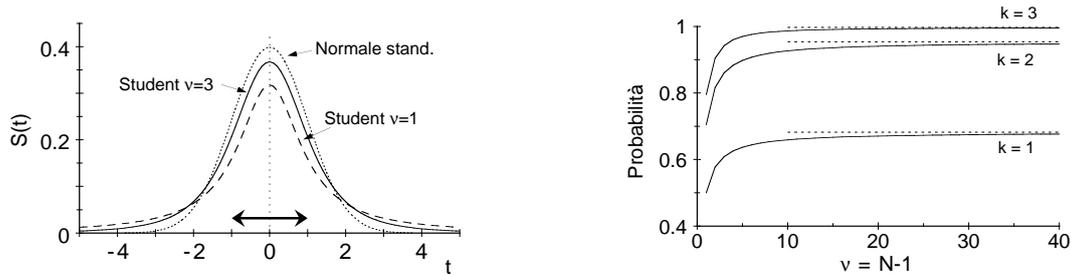


Figura 7.7: A sinistra: distribuzioni di Student per $\nu=1$ (linea tratteggiata) e per $\nu = 3$ (linea continua), confrontate con la distribuzione normale standardizzata (linea punteggiata). La freccia \leftrightarrow indica l'intervallo di confidenza per $k = 1$. A destra, probabilità di confidenza in funzione dei gradi di libertà calcolate integrando le corrispondenti distribuzioni di Student per intervalli di confidenza relativi a $k = 1, 2$ e 3 . Le rette orizzontali tratteggiate indicano le probabilità per la distribuzione normale standardizzata.

nota a priori. Supporremo qui che la distribuzione sia normale. In tal caso è possibile calcolare analiticamente la distribuzione della variabile aleatoria t dell'eq. (7.4.11). La distribuzione $S(t)$ è detta *distribuzione di Student*.

La stima $\tilde{\sigma}[m^*]$ dipende dal numero N di misure (eq. 7.4.8), pertanto anche la distribuzione di Student dipende da N . Per calcolare $\tilde{\sigma}[m^*]$ è necessario conoscere preventivamente m^* , che a sua volta è calcolato a partire dai valori delle N misure (eq. 7.4.6). Solo $N - 1$ valori x_i dell'eq. (7.4.8) sono quindi indipendenti; infatti, noti $N - 1$ valori, il valore N -mo mancante è determinato dall'eq. (7.4.6). Si dice che il problema ha $\nu = N - 1$ *gradi di libertà*.

La distribuzione di Student dipende dal numero ν di gradi di libertà, e viene quindi indicata con $S_\nu(t)$. In Fig. 7.7, a sinistra, sono rappresentate due distribuzioni di Student, per $\nu = 1$ e per $\nu = 3$; per confronto, è mostrata anche la distribuzione normale standardizzata. Si dimostra che la distribuzione di Student per $\nu = 1$ corrisponde alla distribuzione di Cauchy (o di Lorentz) introdotta al § 6.7.1. Al crescere di ν , cioè al crescere del numero di misure N , la distribuzione si stringe progressivamente. Per $\nu \rightarrow \infty$ la distribuzione di Student tende alla distribuzione normale standardizzata.

La conoscenza della distribuzione di Student consente di calcolare il livello di confidenza relativo ad un prefissato intervallo di confidenza. Ad esempio, per l'incertezza standard $\pm\delta X = \pm\tilde{\sigma}[m^*]$ (cioè per $k = 1$), la probabilità è data dall'integrale della distribuzione di Student tra $t = -1$ e $t = 1$. I valori che si ottengono sono mostrati in Fig. 7.7, a destra, in funzione dei gradi di libertà $\nu = N - 1$. Come si vede, la probabilità è inferiore al valore 68.27 % previsto dalla distribuzione normale standardizzata, ma vi si avvicina asintoticamente per $\nu \rightarrow \infty$.

7.4.5 Incertezza e fattore di copertura

Come abbiamo già visto, l'espressione convenzionale dell'incertezza di misura $\delta X = \tilde{\sigma}[m^*]$ equivale ad assumere un fattore di copertura $k = 1$. Il corrispondente livello di confidenza dipende dal numero N di misure, ovvero dal numero $\nu = N - 1$ di gradi di libertà (Fig. 7.7, a destra), e tende asintoticamente al valore del 68.26 % per $N \rightarrow \infty$. Per garantire il massimo di informazione nel comunicare il valore di una grandezza fisica sotto la forma $X \pm \delta X$, è buona norma indicare esplicitamente anche il numero ν di gradi di libertà, cioè l'entità del campione.

In talune applicazioni può essere utile considerare fattori di copertura k maggiori di uno; è il caso per esempio di misure inerenti la sicurezza, per le quali si vogliono indicare limiti di confidenza prossimi al 100 %. A fattori di copertura maggiori di 1 corrispondono intervalli di confidenza più larghi: si parla allora di *incertezza estesa* (ingl. *expanded uncertainty*). L'uso di fattori di copertura diversi da uno, essendo non convenzionale, deve essere sempre esplicitamente menzionato.

In Fig. 7.7 a destra sono mostrate i livelli di confidenza corrispondenti a fattori di copertura $k = 2$ e $k = 3$, calcolate utilizzando la distribuzione di Student.

Frequentemente, nei casi in cui si usano incertezze estese, si preferisce stabilire in partenza il livello di confidenza desiderato (per esempio, $\beta = 90\%$, oppure $\beta = 95\%$), e determinare poi, in funzione del numero ν di gradi di libertà, il fattore di copertura k corrispondente (si veda la Tabella D.4.2 dell'Appendice D).

Nota: In passato era frequente l'uso di quotare l'incertezza di misura per mezzo del cosiddetto *errore probabile*, cioè l'intervallo di confidenza corrispondente ad un livello di confidenza del 50%. Tale pratica contrasta con i criteri di standardizzazione adottati in sede internazionale, e deve essere quindi abbandonata.

Il concetto di intervallo di confidenza consente di stimare probabilisticamente il grado di accordo tra i risultati di due diverse misurazioni.

Esempio: La misurazione di una determinata grandezza, ripetuta $N = 20$ volte, ha condotto ai seguenti risultati (espressi in unità di misura arbitrarie): $X_0 = m^* = 2.5$; $\tilde{\delta}X = \sigma[m^*] = 0.5$. Un valore $m=1.8$ (desunto ad esempio da una tabella pubblicata) è compatibile con il nostro risultato? La misura della discrepanza relativa è $t = (m^* - m)/\tilde{\sigma}[m^*] = (2.5-1.8)/0.5=1.4$. Poiché N è abbastanza grande, possiamo approssimare t con z . Consultiamo le tabelle della distribuzione normale standardizzata (App. D.3): la probabilità che $|m^* - m| < 1.4\sigma[m^*]$ a causa delle fluttuazioni statistiche è di circa l'84%. Il valore $m=1.8$ è compatibile con il nostro risultato sperimentale se riteniamo ragionevole la probabilità del 16% di trovare casualmente differenze più grandi di quella effettivamente trovata.

7.4.6 Rigetto dei dati

In un campionamento costituito da N valori x_i (ad esempio N misure di una grandezza fisica) può succedere che uno dei valori, che indicheremo con x_s , sia chiaramente discrepante rispetto agli altri $N - 1$ valori.

Per fissare le idee su un esempio concreto, supponiamo che i risultati di $N=6$ misurazioni di una grandezza fisica siano (nelle opportune unità di misura)

$$2.7 \quad 2.5 \quad 2.8 \quad 1.5 \quad 2.4 \quad 2.9.$$

Il valore discrepante è $x_s=1.5$. I motivi della discrepanza possono essere:

- una fluttuazione statistica grande nell'ambito della distribuzione della popolazione;
- un errore sistematico non identificato;
- un effetto fisico nuovo ed imprevedibile.

Supponiamo di poter escludere l'ultima possibilità. Cerchiamo un modo per valutare probabilisticamente se il dato discrepante è dovuto ad un errore sistematico (nel qual caso ci sentiremmo autorizzati ad eliminarlo dal campione) oppure è dovuto ad una normale fluttuazione statistica (nel qual caso non sarebbe lecito eliminarlo).

I 6 valori misurati possono essere considerati un campione di una distribuzione limite di singola misura, della quale possiamo stimare valor medio m e scarto quadratico medio σ :

$$\tilde{m} = m^* = 2.46; \quad \tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{N}{N-1}} \sigma^* = 0.5.$$

La differenza tra il valore $x_s=1.5$ e la media $\tilde{m}=2.46$ è circa uguale a $2\tilde{\sigma}$. Facciamo l'approssimazione

$$t = \frac{x - \tilde{m}}{\tilde{\sigma}} \simeq z.$$

Dalle tabelle dell'Appendice D.3 possiamo vedere che la probabilità che un valore misurato a caso differisca dal valor medio m per più di 2σ è circa il 5%. In altri termini, su $N=6$ misure, in media ce ne aspettiamo 0.3 distanti dal valor medio più di 2σ (cioè "peggiori" del valore x_s).

Un criterio convenzionale frequentemente utilizzato (detto *criterio di Chauvenet*) consiste nel ritenere eliminabile da un dato campione un valore x_s se il numero atteso di misure "peggiori" è

inferiore a 0.5. In tal caso si ritiene altamente probabile che la discrepanza del valore x_s non sia dovuta ad una semplice fluttuazione statistica.

Nell'esempio considerato, il valore $x_s=1.5$ potrebbe venire eliminato in base al criterio di Chauvenet.

7.5 Il metodo dei minimi quadrati

Nel § 4.7 abbiamo affrontato, a livello introduttivo, il problema della correlazione tra due grandezze fisiche X e Y . In particolare, ci siamo soffermati sul caso in cui le due grandezze siano ragionevolmente collegate da una relazione di dipendenza lineare: $Y = A + BX$. Abbiamo imparato a valutare i parametri A e B della retta che meglio si adatta ai punti sperimentali mediante la procedura di *regressione lineare*, che si basa sul metodo dei *minimi quadrati*. In questo § 7.5 vogliamo dare una giustificazione del metodo dei minimi quadrati basata sul criterio di massima verosimiglianza, nonché estenderne l'applicazione al caso generico di una qualsiasi funzione $Y = \phi(X)$.

7.5.1 Posizione del problema

Supponiamo di avere misurato \mathcal{N} coppie di valori $(x_i \pm \delta x_i, y_i \pm \delta y_i)$ di due grandezze fisiche X e Y e di averle rappresentate come punti in un diagramma cartesiano x, y (Appendice A.3).

Vogliamo cercare una relazione analitica $Y = \phi(X)$ che descriva in modo soddisfacente la relazione tra le due grandezze X e Y . In generale la funzione $Y = \phi(X)$ dipenderà da un certo numero di parametri $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ per cui, in termini generali, scriveremo $Y = \phi(X, \{\lambda_k\})$.

Esempio: Se i punti sul grafico sono disposti approssimativamente lungo una retta, si può ipotizzare che la relazione tra X e Y sia del tipo $Y = A + BX$: in questo caso A e B sono i due parametri λ_1, λ_2 che caratterizzano la retta.

L'interpretazione di una famiglia di \mathcal{N} punti $(x_i \pm \delta x_i, y_i \pm \delta y_i)$ mediante una relazione funzionale $Y = \phi(X, \{\lambda_k\})$ può venire decomposta in due fasi:

- a) la scelta del tipo di funzione $Y = \phi(X, \{\lambda_k\})$ (lineare, parabolica, esponenziale, sinusoidale, etc.);
- b) la stima dei valori dei parametri $\{\lambda_k\}$ che consentono di adattare meglio la curva $Y = \phi(X, \{\lambda_k\})$ ai punti sperimentali $(x_i \pm \delta x_i, y_i \pm \delta y_i)$.

Supponiamo per ora di avere risolto il primo problema, cioè di conoscere la forma della funzione $Y = \phi(X, \{\lambda_k\})$, in base a considerazioni indipendenti di natura teorica o sperimentale. La bontà dell'ipotesi circa la forma della funzione $Y = \phi(X, \{\lambda_k\})$ potrà comunque essere valutata a posteriori con il test del *chi-quadrato*, già introdotto al § 4.7.6, e che approfondiremo al seguente § 7.6.

7.5.2 Massima verosimiglianza e minimi quadrati

Per risolvere il secondo problema, cioè per stimare i parametri $\{\lambda_k\}$ e quindi *adattare* (ingl. *to fit*) la funzione $Y = \phi(X, \{\lambda_k\})$ ai punti sperimentali, utilizzeremo il metodo dei minimi quadrati derivato dal criterio di massima verosimiglianza.

Il metodo si basa su due ipotesi di partenza:

- a) La grandezza X è nota con incertezza trascurabile rispetto alla grandezza Y : per ogni punto $\delta x_i = 0, \delta y_i \neq 0$. Questa ipotesi non è particolarmente restrittiva; mostreremo più sotto come si può procedere nel caso in cui i valori δx_i non siano trascurabili.
- b) L'incertezza su Y è espressa in termini dello scarto quadratico medio di una distribuzione normale (ad esempio una distribuzione delle medie campionarie $m_i^* = m^*[y_i]$): $\delta y_i = \sigma_i$. Nel seguito, per semplificare la notazione, scriveremo σ_i invece di $\tilde{\sigma}_i[m_i^*]$.

Per introdurre il criterio di massima verosimiglianza, seguiamo la stessa linea di ragionamento già usata in precedenti applicazioni. Se i parametri $\{\lambda_k\}$ della funzione $\phi(X, \{\lambda_k\})$ fossero noti, una volta fissato un valore x_i della variabile indipendente X , la densità di probabilità di misurare un valore y_i della variabile dipendente sarebbe

$$f(y_i) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{[y_i - \phi(x_i, \{\lambda_k\})]^2}{2\sigma_i^2} \right\}. \quad (7.5.1)$$

Fissato un insieme di \mathcal{N} valori x_1, x_2, \dots, x_N della variabile X , la densità di probabilità di ottenere una \mathcal{N} -pla di valori y_1, y_2, \dots, y_N tra loro indipendenti della variabile Y sarebbe una densità multivariata fattorizzabile nel prodotto delle singole densità $f(y_i)$:

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2, \dots, y_N; \{\lambda_k\}) &= \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{[y_i - \phi(x_i, \{\lambda_k\})]^2}{2\sigma_i^2} \right\} \\ &= \frac{1}{(\prod_i \sigma_i) (2\pi)^{\mathcal{N}/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{[y_i - \phi(x_i, \{\lambda_k\})]^2}{\sigma_i^2} \right\} \end{aligned} \quad (7.5.2)$$

Nella realtà sono invece noti gli \mathcal{N} valori y_1, y_2, \dots, y_N mentre sono incogniti i valori dei parametri $\{\lambda_k\}$. Secondo il principio di massima verosimiglianza, le migliori stime dei parametri $\{\lambda_k\}$ sono i valori che massimizzano la densità di probabilità $g(y_1, y_2, \dots, y_N; \{\lambda_k\})$ nell'eq. (7.5.2).

Trovare il massimo di $g(y_1, y_2, \dots, y_N; \{\lambda_k\})$ rispetto ai parametri $\{\lambda_k\}$ equivale a trovare il minimo della sommatoria che compare ad esponente nell'ultimo membro dell'eq. (7.2.5). La sommatoria viene convenzionalmente indicata con χ^2 (*chi quadrato*):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{[y_i - \phi(x_i, \{\lambda_k\})]^2}{\sigma_i^2}. \quad (7.5.3)$$

Ogni termine della sommatoria nel χ^2 valuta la discrepanza tra punti sperimentali e curva teorica, misurandola in unità di misura σ_i pari all'incertezza del singolo punto.

Poiché i valori x_i , y_i e σ_i sono noti, χ^2 è funzione solo dei parametri $\{\lambda_k\}$; si tratta quindi di una funzione di p variabili (p è il numero totale di parametri)

$$\chi^2 = \chi^2(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p), \quad (7.5.4)$$

definita in uno spazio p -dimensionale.

Per determinare i parametri $\{\lambda_k\}$ che consentono alla funzione $\phi(X, \{\lambda_k\})$ di adattarsi meglio ai punti sperimentali, è necessario trovare il minimo assoluto della funzione χ^2 nello spazio p -dimensionale dei parametri. La procedura, detta di *minimizzazione*, può essere effettuata in vari modi, a seconda della natura della funzione $\phi(X, \{\lambda_k\})$.

7.5.3 Minimizzazione per funzioni lineari nei parametri

La procedura di minimizzazione del χ^2 può essere effettuata per via analitica quando la funzione $\phi(X, \{\lambda_k\})$ dipende linearmente dai parametri $\{\lambda_k\}$. L'espressione più generale per la funzione ϕ è in questo caso del tipo

$$\phi(X, \{\lambda_k\}) = \lambda_1 h_1(X) + \lambda_2 h_2(X) + \lambda_3 h_3(X) + \dots = \sum_{k=1}^p \lambda_k h_k(X), \quad (7.5.5)$$

dove le h_k sono funzioni *note* della variabile X .

La funzione χ^2 assume allora la forma

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{1}{\sigma_i^2} [y_i - \lambda_1 h_1(x_i) - \lambda_2 h_2(x_i) - \lambda_3 h_3(x_i) - \dots]^2. \quad (7.5.6)$$

Il minimo di χ^2 si ottiene imponendo che siano nulle le sue derivate prime calcolate rispetto a ciascuno dei p parametri. È facile verificare che, per il generico parametro λ_k , si ottiene un'equazione di primo grado nelle p incognite λ_k :

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial \lambda_k} = \sum_{i=1}^N \frac{2}{\sigma_i^2} h_k(x_i) [y_i - \lambda_1 h_1(x_i) - \lambda_2 h_2(x_i) - \lambda_3 h_3(x_i) - \dots] = 0. \quad (7.5.7)$$

Considerando le derivate rispetto a tutti i parametri, si ha un sistema di p equazioni lineari a coefficienti costanti nelle p incognite λ_k . La determinazione dei parametri λ_k si riduce quindi alla soluzione del sistema di equazioni, che può essere ottenuta con tecniche note (ad esempio con il metodo dei determinanti).

Un'applicazione di questa procedura è già stata incontrata al § 4.7.2. La funzione $Y = A + BX$, di cui ci eravamo lì occupati, è un caso particolarmente semplice dell'espressione (7.5.5), con $h_1(X) = 1$, $h_2(X) = X$, $h_3(X) = h_4(X) = \dots = 0$. Poiché la funzione $Y = A + BX$ è lineare nella variabile X , la procedura per la determinazione dei parametri $\lambda_1 = A$ e $\lambda_2 = B$ prende il nome di **regressione lineare**.

Il caso della regressione lineare può essere generalizzato ad una generica funzione polinomiale nella variabile X ,

$$Y = \lambda_1 + \lambda_2 X + \lambda_3 X^2 + \lambda_4 X^3 \dots \quad (7.5.8)$$

Il polinomio dell'eq. (7.5.8) è ancora un caso particolare dell'eq. (7.5.6). Un polinomio di grado $p - 1$ ha p parametri. Annullando le derivate prime del χ^2 rispetto a ciascuno dei p parametri

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial \lambda_k} = \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} [y_i - \lambda_1 - \lambda_2 x_i - \lambda_3 x_i^2 - \lambda_4 x_i^3 - \dots]^2 = 0 \quad (7.5.9)$$

si ottiene un sistema di p equazioni lineari a coefficienti costanti in p incognite, che, una volta risolto, dà i valori dei p parametri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$. Il metodo è chiamato **regressione polinomiale**.

I parametri $\{\lambda_k\}$ stimati per via analitica con il metodo dei minimi quadrati sono funzione dei valori x_i, y_i e delle incertezze σ_i (per un esempio concreto, si riveda il caso della regressione lineare, al § 4.7.3). È quindi possibile valutarne anche le *incertezze* $\{\delta \lambda_k\}$ usando le procedure di propagazione illustrate al § 4.6, in analogia a quanto fatto al § 4.7.4 nel caso della regressione lineare.

Nota: Si faccia attenzione a distinguere la *linearità* della funzione $\phi(X, \{\lambda_k\})$ rispetto ai parametri $\{\lambda_k\}$ dalla linearità rispetto alla variabile X .

7.5.4 Minimizzazioni per funzioni non lineari nei parametri

Passiamo ora a considerare funzioni $\phi(X, \{\lambda_k\})$ non lineari rispetto ai parametri $\{\lambda_k\}$.

In alcuni casi è possibile, mediante opportuni cambiamenti di variabili, ottenere una linearizzazione della funzione, ed applicare quindi i metodi analitici illustrati qui sopra (§ 7.5.3).

Esempio 1: Una relazione esponenziale del tipo $Y = a \exp(bX)$ può venire linearizzata passando al logaritmo naturale: $\ln Y = \ln a + bX$. La nuova espressione è lineare rispetto ai parametri $\lambda_1 = \ln a$ e $\lambda_2 = b$. Operando la sostituzione $Y' = \ln Y$ si ottiene l'espressione $Y' = \lambda_1 + \lambda_2 X$, lineare anche in X , cui può essere applicata la procedura di regressione lineare.

Esempio 2: Una generica potenza $Y = aX^b$ può venire linearizzata passando ai logaritmi (naturali o decimali): $\log Y = \log a + b \log X$. La nuova espressione è lineare rispetto ai parametri $\lambda_1 = \log a$ e $\lambda_2 = b$. Operando le sostituzioni $Y' = \log Y$ e $X' = \log X$, si ottiene l'espressione $Y' = \lambda_1 + \lambda_2 X'$, lineare in X' , cui può essere applicata la procedura di regressione lineare.

Se la funzione $\phi(X, \{\lambda_k\})$ non è lineare o linearizzabile rispetto ai parametri $\{\lambda_k\}$, la minimizzazione del χ^2 non può essere fatta per via analitica, bensì richiede metodi di tipo numerico.

Esempio: Un esempio di funzione non linearizzabile è fornito dalla legge oraria dell'oscillatore armonico smorzato: $Y = Y_0 \exp(-\gamma t) \sin(\omega_0 t + \vartheta)$.

Il metodo più elementare consiste nel creare un reticolo regolare nello spazio a p dimensioni dei parametri $\{\lambda_k\}$. Ogni punto del reticolo corrisponde ad un insieme di p valori $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$. Per ogni punto del reticolo si calcola il corrispondente valore del χ^2 usando l'eq. (7.5.3); si cerca poi il punto cui corrisponde il valore minimo di χ^2 . La ricerca può essere resa più accurata infittendo opportunamente i punti del reticolo.

Questo metodo, in linea di principio molto semplice, può diventare molto lento e inefficiente al crescere del numero p di parametri $\{\lambda_k\}$: se si considerano n valori per ogni parametro, il numero di punti del reticolo da esplorare è n^p , che può facilmente diventare un numero proibitivamente grande.

Esistono varie altre strategie di ricerca del minimo assoluto di χ^2 , più efficienti e veloci, implementate in programmi per calcolatore facilmente reperibili. Per approfondimenti in materia, si rimanda alle pubblicazioni specializzate.

7.5.5 Come trattare le incertezze su X .

Il metodo dei minimi quadrati delineato sopra si basa sull'ipotesi che l'incertezza sulla variabile indipendente X sia trascurabile rispetto all'incertezza sulla variabile dipendente Y . Questa condizione non è sempre verificata nella pratica di laboratorio. Se i valori di incertezza δx_i non sono trascurabili, si può procedere nel modo seguente.

- a) Si effettua una prima applicazione, provvisoria, del metodo dei minimi quadrati, tenendo conto solo delle incertezze $\sigma_i = \delta y_i$ sulla variabile Y . Si ottengono così dei valori approssimati $\{\lambda'_k\}$ dei parametri, che consentono di determinare, sempre in modo approssimato, la funzione $\phi'(X, \{\lambda'_k\})$. (Nel caso della regressione lineare, come abbiamo visto al § 4.7.3, questo primo passo può essere fatto anche per via grafica.)
- b) Si trasformano le incertezze $(\delta x_i)_{\text{exp}}$ della grandezza X in contributi $(\delta y_i)_{\text{tra}}$ alle incertezze sulla grandezza Y utilizzando la procedura di propagazione descritta al § 4.6.3 e sintetizzata nell'eq. (4.6.11). Si ottiene così per ogni punto

$$(\delta y_i)_{\text{tra}} = \left| \frac{d\phi'(X, \{\lambda'_k\})}{dX} \right|_{x_i} (\delta x_i)_{\text{exp}}. \quad (7.5.10)$$

- c) Per ogni punto, si sommano quadraticamente i due contributi all'incertezza su Y , quello sperimentale e quello trasferito da X :

$$(\delta y_i)_{\text{tot}}^2 = (\delta y_i)_{\text{exp}}^2 + (\delta y_i)_{\text{tra}}^2. \quad (7.5.11)$$

- d) Si effettua l'applicazione definitiva del metodo dei minimi quadrati, assumendo come incertezze i valori $\sigma_i = (\delta y_i)_{\text{tot}}$.

7.5.6 Valutazione a posteriori dell'incertezza su Y .

Come abbiamo già visto studiando la procedura di regressione lineare (§ 4.7.7), può succedere che la valutazione delle incertezze $\delta y_i = \sigma_i$ non sia ritenuta affidabile (ad esempio a seguito di un test del χ^2). Può capitare che per ogni valore x_i si sia misurato un solo valore y_i , e quindi non si siano potuti considerare gli effetti delle fluttuazioni casuali; oppure ci si rende conto che gli errori sistematici sono importanti ma non si è in grado di stimare il loro contributo all'incertezza.

In tali casi, si possono comunque stimare i parametri $\{\lambda_k\}$ e tentare una valutazione *a posteriori* dell'incertezza media $\delta y = \sigma$ sui punti sperimentali.

I parametri $\{\lambda_k\}$ si ricavano minimizzando la sommatoria

$$\psi^2 = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} [y_i - \phi(X, \{\lambda_k\})]^2, \quad (7.5.12)$$

che corrisponde all'eq. (7.5.3) se si ipotizzano incertezze uguali per ogni punto.

L'incertezza incognita σ , uguale per ogni punto, può venire stimata applicando ancora il principio di massima verosimiglianza, massimizzando questa volta la densità di probabilità

$$G_{\mathcal{N}}(y_1, y_2, \dots, y_N; \sigma) = \prod_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{[y_i - \phi(X, \{\lambda_k\})]^2}{2\sigma^2} \right\}. \quad (7.5.13)$$

rispetto al parametro σ^2 . È facile verificare che si ottiene

$$\sigma^2 = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_i [y_i - \phi(X, \{\lambda_k\})]^2. \quad (7.5.14)$$

La stima dell'incertezza data dall'eq. (7.5.6) non è però corretta. Consideriamo ad esempio il caso limite di \mathcal{N} punti sperimentali interpretati da una curva polinomiale con esattamente $p = \mathcal{N}$ parametri. In tal caso la curva determinata con la regressione polinomiale passa esattamente per tutti i punti e l'eq. (7.5.6) dà comunque $\sigma^2 = 0$.

Poiché i p parametri della curva sono determinati a partire dai dati sperimentali, restano solo $\mathcal{N} - p$ gradi di libertà, cioè valori indipendenti per determinare l'incertezza. Di conseguenza, una stima corretta dell'incertezza si può avere solo se $\mathcal{N} > p$, ed è data dall'espressione

$$\sigma^2 = \frac{1}{\mathcal{N} - p} \sum_i [y_i - \phi(X, \{\lambda_k\})]^2. \quad (7.5.15)$$

7.6 Il test del chi quadrato

Il test del *chi quadrato* (χ^2) offre un criterio per verificare in termini probabilistici la compatibilità di un'ipotesi teorica con un insieme di dati sperimentali.

Applicheremo il test del chi quadrato a due ambiti di problemi:

- a) Confronto tra distribuzioni di variabile aleatoria relative ad una popolazione (distribuzioni limite o distribuzioni teoriche) e ad un campionamento (distribuzioni sperimentali).
- b) Confronto tra un insieme di coppie di valori misurati (x_k, y_k) di due grandezze fisiche X e Y ed una relazione funzionale teorica $Y = \phi(X)$.

7.6.1 Confronto tra valori attesi e valori osservati

Vogliamo per prima cosa introdurre una grandezza che misuri opportunamente la discrepanza tra valori sperimentali e valori teorici. Vogliamo anche che questa grandezza sia espressa nello stesso modo nei due diversi ambiti di applicazione indicati sopra.

Chiariamo meglio il problema facendo tre esempi, i primi due relativi a distribuzioni di variabile aleatoria, il terzo relativo alla relazione funzionale tra due grandezze X e Y .

Esempio 1: Distribuzione binomiale. $n=5$ dadi vengono lanciati contemporaneamente; indichiamo con K il numero di dadi che mostrano il numero "2"; la variabile aleatoria K può assumere $\mathcal{N}=6$ valori: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Se il dado non è truccato, la probabilità corrispondente ad ogni valore della variabile aleatoria K è data dalla distribuzione binomiale $\mathcal{P}_{n,p}(k) = \mathcal{P}_{5,1/6}(k)$ (distribuzione teorica). Supponiamo ora di fare un campionamento consistente in N ripetizioni del lancio dei 5 dadi; ad ogni ripetizione la variabile K assumerà un diverso valore; dopo N ripetizioni, ad ogni valore di K sarà associato il numero di volte O_k che quel valore è comparso. Il valore *osservato* O_k andrà confrontato con il valore *atteso* (in inglese *expected*) $E_k = N \cdot \mathcal{P}_{5,1/6}(k)$.

Esempio 2: Distribuzione normale. Vengono eseguite N misurazioni di una grandezza fisica X . I valori di misura vengono raggruppati in un istogramma con \mathcal{N} colonne; l'altezza della colonna k -ma è proporzionale al numero O_k di valori osservati. Possiamo fare l'ipotesi che l'istogramma sia un campionamento di una distribuzione limite normale con densità di probabilità $f(x)$;

ad ogni colonna dell'istogramma corrisponde una porzione dell'area sottesa dalla curva $f(x)$ corrispondente alla probabilità \mathcal{P}_k . Il valore atteso di misure nella colonna k -ma è $E_k = N \cdot \mathcal{P}_k$.

Esempio 3: Relazione funzionale $Y = \phi(X)$. Vengono misurate \mathcal{N} coppie di valori (x_k, y_k) di due grandezze fisiche X e Y ; supponiamo che l'incertezza sulle misure x_k sia trascurabile rispetto all'incertezza δy_k sulle misure y_k . Si fa l'ipotesi che le misure siano interpretabili da una relazione funzionale $Y = \phi(X)$. Per ogni valore misurato x_k della grandezza X potremo confrontare il valore osservato (cioè misurato) $O_k = y_k$ con il valore atteso $E_k = \phi(x_k)$.

I tre esempi mostrano tre diversi modi di definire valori osservati O_k e valori attesi E_k , con $k = 1 \dots \mathcal{N}$.

Un modo ragionevole per misurare la discrepanza globale tra valori osservati e valori attesi è dato dalla sommatoria

$$\sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{(O_k - E_k)^2}{(\delta O_k)^2}, \quad (7.6.1)$$

dove δO_k è l'incertezza del valore osservato O_k .

Ogni singolo termine della sommatoria rappresenta quindi la discrepanza tra un valore osservato e il corrispondente valore atteso, rapportata all'incertezza del valore osservato: quanto maggiore è l'incertezza δO_k , tanto minore è il peso del termine $(O_k - E_k)^2$ nella sommatoria.

7.6.2 Definizione del chi quadrato

Consideriamo con maggiore attenzione le incertezze δO_k che compaiono al denominatore dell'eq. (7.6.1).

Negli Esempi 1 e 2 abbiamo considerato i campionamenti di due distribuzioni, rispettivamente binomiale (o di Bernoulli) e gaussiana: in entrambi i casi, i valori O_k rappresentano conteggi e sono pertanto da considerare come variabili aleatorie distribuite, a seconda del modo in cui sono costruiti i relativi istogrammi, secondo la statistica di Bernoulli (vedi § 6.1.5) oppure di Poisson (vedi § 6.4.5). In ogni caso, la media della distribuzione corrisponde al valore atteso: $\mathbf{m}[O_K] = E_k$. Nel caso della distribuzione di Poisson, media e varianza coincidono: $\mathbf{m}[O_K] = \mathbf{D}[O_k] = E_k$.

Abbiamo d'altra parte visto al § 6.6.3 che, per valori medi sufficientemente elevati, le distribuzioni di Bernoulli e di Poisson possono essere approssimate da una distribuzione normale. Nelle applicazioni qui considerate si considera generalmente valida l'approssimazione normale quando E_k sia dell'ordine di 5 o superiore. In tal caso possiamo trattare i fattori $(\delta O_k)^2$ come se fossero varianze σ_k^2 di distribuzioni normali.

Nell'Esempio 3 considerato sopra (coppie di valori x_k, y_k), se l'incertezza sui valori y_k è dovuta all'effetto degli errori casuali, i fattori δO_k corrisponderanno alle varianze σ_k^2 delle corrispondenti distribuzioni (normali) delle medie campionarie.

Se le incertezze δO_k dell'eq. (7.6.1) possono essere espresse come varianze di distribuzioni normali, la sommatoria dell'eq. (7.6.1) viene chiamata *chi quadrato* (si riveda anche l'eq. 7.5.3):

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{(O_k - E_k)^2}{\sigma_k^2}. \quad (7.6.2)$$

I valori O_k sono variabili aleatorie. Pertanto anche χ^2 è una variabile aleatoria dipendente dal particolare campionamento.

Una stima grossolana del grado di accordo tra teoria ed esperimento può essere fatta in base alle seguenti considerazioni (peraltro già accennate al § 4.7.6 per il caso particolare della regressione lineare).

Se la teoria è corretta, è comunque statisticamente plausibile aspettarsi che la differenza tra valore atteso E_k e valore osservato O_k sia confrontabile con l'incertezza $\delta O_k = \sigma_k$ del valore osservato. In altri termini, ci si aspetta che ogni termine nella sommatoria (7.6.2) sia dell'ordine di uno, e pertanto che $\chi^2 \simeq \mathcal{N}$.

Valori di χ^2 significativamente maggiori di \mathcal{N} sono generalmente un indizio che la teoria non è corretta, ma potrebbero anche essere dovuti ad una sottostima delle incertezze σ_k . Valori di χ^2 dell'ordine di \mathcal{N} o inferiori indicano che la teoria è probabilmente (ma non necessariamente!) corretta. Valori molto piccoli di χ^2 rispetto a \mathcal{N} indicano generalmente che le incertezze σ_k sono state sovrastimate.

7.6.3 Gradi di libertà

L'aspettativa $\chi^2 \simeq \mathcal{N}$ è ragionevole se gli \mathcal{N} termini della sommatoria che compare nell'eq. (7.6.2) sono tutti indipendenti tra loro. Nella pratica ciò in genere non avviene; tipicamente succede che, una volta note ν coppie di valori $(O_k - E_k)$, le rimanenti $c = \mathcal{N} - \nu$ coppie siano univocamente determinate, e quindi prive di carattere aleatorio.

La questione può essere meglio chiarita riprendendo i tre esempi introdotti sopra.

Esempio 1: Distribuzione binomiale. Una volta fissate le caratteristiche del fenomeno, i due parametri n e p sono noti ed è quindi completamente nota la distribuzione teorica binomiale $\mathcal{P}_{n,p}$, inclusi il suo valor medio $m = np$ e la sua varianza $D = npq$. I valori attesi E_k tuttavia non dipendono solo dalla distribuzione binomiale, ma anche dall'estensione N del campione: $E_k = N \mathcal{P}_{n,p}$. Una volta noti $\mathcal{N} - 1$ valori O_k , il valore \mathcal{N} -mo è univocamente fissato dal vincolo che $\sum O_k = \sum E_k = N$. Pertanto la sommatoria dell'eq. (7.6.2) contiene $\nu = \mathcal{N} - 1$ termini indipendenti.

Esempio 2: Distribuzione normale. Anche nel confronto tra un istogramma di misura ed una distribuzione limite gaussiana esiste il vincolo che $\sum O_k = \sum E_k = N$. Inoltre i parametri m e σ della distribuzione limite non sono arbitrari, ma vengono stimati a partire dai corrispondenti parametri del campione: le due equazioni $m = m^*$ e $\sigma = \sqrt{N/(N-1)} \sigma^*$ rappresentano due ulteriori vincoli che collegano i valori O_k ai valori E_k : $\sum x_k O_k = \sum x_k E_k$ e $N \sum (x_k - m^*)^2 O_k = (N-1) \sum (x_k - m)^2 E_k$. In totale ci sono quindi $c = 3$ vincoli, e la sommatoria dell'eq. (7.6.2) ha $\nu = \mathcal{N} - 3$ termini indipendenti.

Esempio 3: Relazione funzionale $Y = \phi(X)$. Supponiamo, per fissare le idee, che la relazione sia di tipo lineare: $Y = A + BX$. I parametri A e B della retta non sono arbitrari, ma vengono stimati a partire dai valori sperimentali (x_k, y_k) mediante la procedura di regressione lineare illustrata nel §7.5. Le due equazioni che definiscono i valori di A e B rappresentano altrettanti vincoli che collegano i valori $O_k = y_k$ ai valori $E_k = \phi(x_k)$. In totale ci sono quindi $c = 2$ vincoli, e la sommatoria dell'eq. (7.6.2) ha $\nu = \mathcal{N} - 2$ termini indipendenti.

Generalizzando, i valori osservati O_k ed i valori attesi E_k possono essere collegati da un numero c di equazioni indipendenti, dette *vincoli* (in inglese *constraints*). Il numero di termini indipendenti nella sommatoria dell'eq. (7.6.2) è pertanto $\nu = \mathcal{N} - c$, ed è chiamato il numero di *gradi di libertà* (in inglese *degrees of freedom*).

Su \mathcal{N} termini della sommatoria, solo ν hanno carattere aleatorio. È pertanto ragionevole aspettarsi che $\chi^2 \simeq \nu$ anziché $\chi^2 \simeq \mathcal{N}$.

Naturalmente il test del chi quadrato ha senso solo se la sommatoria dell'eq. (7.6.2) contiene almeno un termine aleatorio, cioè se $\mathcal{N} > c$, in modo che $\nu > 0$.

Esempio 1: Distribuzione binomiale. Nel caso della distribuzione binomiale $\mathcal{P}_{n,p}$ c'è un solo vincolo, $c = 1$. La condizione $\nu > 0$, cioè $\mathcal{N} - c = \nu > 0$, è sempre soddisfatta. Nel caso minimo $n = 1$ la variabile aleatoria K ha infatti $\mathcal{N} = 2$ possibili valori, $k_1 = 0$ e $k_2 = 1$.

Esempio 2: Distribuzione normale. Nel caso della distribuzione normale i vincoli sono 3. Affinché $\nu > 0$ è necessario che il numero \mathcal{N} di colonne dell'istogramma sperimentale sia almeno 4.

Esempio 3: Relazione funzionale $Y = \phi(X)$. Nel caso della regressione lineare i vincoli sono 2. Il numero \mathcal{N} di coppie di valori sperimentali (x_k, y_k) deve essere almeno 3.

7.6.4 Distribuzione del chi quadrato

Vogliamo ora dare un'interpretazione quantitativamente più consistente del test del chi quadrato, basandoci sulla teoria delle probabilità.

Il χ^2 , definito dall'eq. (7.6.2) per misurare la discrepanza tra teoria ed esperimento, è una *variabile aleatoria*. Una volta fissata una legge teorica (distribuzione di variabile aleatorio o relazione $Y = \phi(X)$), se si ripettesse più volte il campionamento sperimentale si otterrebbero valori diversi delle variabili O_k e quindi del χ^2 .

Se siamo in grado di calcolare la legge di distribuzione della variabile aleatoria χ^2 , possiamo valutare la probabilità di ottenere valori maggiori (o minori) di quello effettivamente ottenuto, e quindi trarre delle conclusioni probabilistiche circa la bontà dell'ipotesi teorica.

Per cercare la legge di distribuzione del χ^2 , osserviamo innanzitutto che nella sommatoria dell'eq. (7.6.2) tutti i termini hanno la stessa forma, indipendentemente dalla natura del problema trattato: la variabile O_k è infatti distribuita in modo normale intorno al valore E_k , con varianza σ^2 .

Conviene pertanto introdurre la variabile normale standardizzata (vedi § 6.5.3)

$$Z = \frac{O_k - E_k}{\sigma_k}. \quad (7.6.3)$$

La variabile aleatoria Z è distribuita in modo normale, con valor medio 0 e scarto quadratico medio 1.

La sommatoria del χ^2 , eq. (7.6.2), può perciò essere riscritta come

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} Z^2 \quad (7.6.4)$$

Gli \mathcal{N} termini della sommatoria (7.6.4) non sono però generalmente indipendenti, come abbiamo già osservato. Se solo ν degli \mathcal{N} termini sono indipendenti, la sommatoria dell'eq. (7.6.4) contiene solo ν variabili aleatorie Z^2 indipendenti, tutte comunque caratterizzate dalla stessa legge di distribuzione.

La legge di distribuzione del χ^2 definito dalle eq. (7.6.2) e (7.6.4) può essere ricondotta con buona approssimazione alla legge di distribuzione di un χ^2 definito come sommatoria di ν variabili indipendenti Z^2 :

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{\nu} Z^2. \quad (7.6.5)$$

Per essere rigorosi, con l'espressione *distribuzione del chi quadrato* si intende proprio la distribuzione della variabile aleatoria χ^2 definita dall'eq. (7.6.5) come somma di ν variabili *indipendenti* Z^2 , dove Z è la variabile aleatoria normale standardizzata.

È normale aspettarsi che la distribuzione del chi quadrato dipenda dal numero di termini della sommatoria dell'eq. (7.6.5). Avremo cioè una diversa distribuzione $G_\nu(\chi^2)$ per ogni valore del numero di gradi di libertà ν .

Valutiamo la distribuzione del chi quadrato nel caso più semplice, cioè per **un grado di libertà** ($\nu = 1$). In tal caso

$$\chi^2 = Z^2 \quad \text{con} \quad f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-z^2/2]. \quad (7.6.6)$$

Per calcolare la densità di probabilità $G(z^2)$, che equivale alla distribuzione del chi quadrato $G_1(\chi^2)$, osserviamo che ad ogni valore z^2 della variabile Z^2 corrispondono due valori di Z : $+z$ e $-z$. La probabilità che il valore di Z^2 sia compreso in un intervallo dz^2 è pertanto

$$\begin{aligned} G(z^2) dz^2 &= 2 f(z) dz \\ &= 2 f(z) \frac{dz}{d(z^2)} dz^2 = 2 f(z) \frac{1}{2z} dz^2 \end{aligned} \quad (7.6.7)$$

per cui

$$G(z^2) = \frac{f(z)}{z} = \frac{1}{z\sqrt{2\pi}} \exp[-z^2/2] \quad (7.6.8)$$

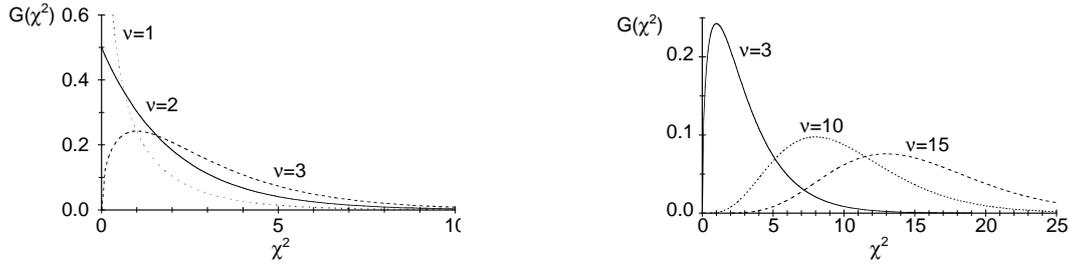


Figura 7.8: Distribuzioni del chi quadrato $G_\nu(\chi^2)$ per diversi valori del numero di gradi di libertà ν : $\nu = 1, 2, 3$ a sinistra, $\nu = 3, 5, 10, 15$ a destra. Il valor medio della distribuzione è uguale a ν . La varianza è uguale a 2ν . Si faccia attenzione che le scale orizzontale e verticale sono diverse nelle due figure.

ovvero

$$G_1(\chi^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\chi^2}} \exp[-\chi^2/2]. \quad (7.6.9)$$

La funzione $G_1(\chi^2)$ diverge per $\chi^2 \rightarrow 0$ (Fig. 7.6.1, a sinistra); si può comunque verificare che è correttamente normalizzata ad uno.

Nel caso di **due gradi di libertà** ($\nu = 2$) si dimostra che la distribuzione del chi quadrato è

$$G_2(\chi^2) = G(Z^2 + Z^2) = 0.5 \exp[-\chi^2/2]. \quad (7.6.10)$$

Per un **numero qualsiasi di gradi di libertà** ν si dimostra che la densità di probabilità $G_\nu(\chi^2)$ è data dalla formula

$$G_\nu(\chi^2) = \frac{1}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} (\chi^2)^{\nu/2-1} \exp[-\chi^2/2] \quad (7.6.11)$$

in cui compare la *funzione* Γ definita nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \text{per } n \text{ intero} & \quad \Gamma(n+1) = n! \\ \text{per } n \text{ semintero} & \quad \Gamma(n+1/2) = (2n-1)(2n-3)\dots 5 \cdot 3 \cdot 1 \sqrt{\pi}/2^n \end{aligned}$$

In Fig. 7.8 sono mostrate le distribuzioni del χ^2 per diversi valori del parametro ν .

Calcoliamo ora il **valor medio** della distribuzione del chi quadrato per ν gradi di libertà:

$$\langle \chi^2 \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\nu} Z^2 \right\rangle = \sum_{k=1}^{\nu} \langle Z^2 \rangle = \nu \langle Z^2 \rangle. \quad (7.6.12)$$

Per calcolare $\langle Z^2 \rangle$ ricordiamo che Z è la variabile aleatoria normale standardizzata definita dall'eq. (7.6.3), per cui

$$\langle Z^2 \rangle = \left\langle \frac{(O_k - E_k)^2}{\sigma_k^2} \right\rangle = \frac{\langle (O_k - E_k)^2 \rangle}{\sigma_k^2} = \frac{\sigma_k^2}{\sigma_k^2} = 1. \quad (7.6.13)$$

In definitiva, il valor medio della distribuzione del chi quadrato è uguale al numero di gradi di libertà:

$$\langle \chi^2 \rangle = \nu. \quad (7.6.14)$$

Questo fatto giustifica la procedura approssimata considerata sopra, basata sul fatto che ci si aspetta che il χ^2 sia uguale al numero di gradi di libertà ν .

È possibile dimostrare anche che la **varianza** della distribuzione del chi quadrato è pari a due volte il numero di gradi di libertà, cioè 2ν .

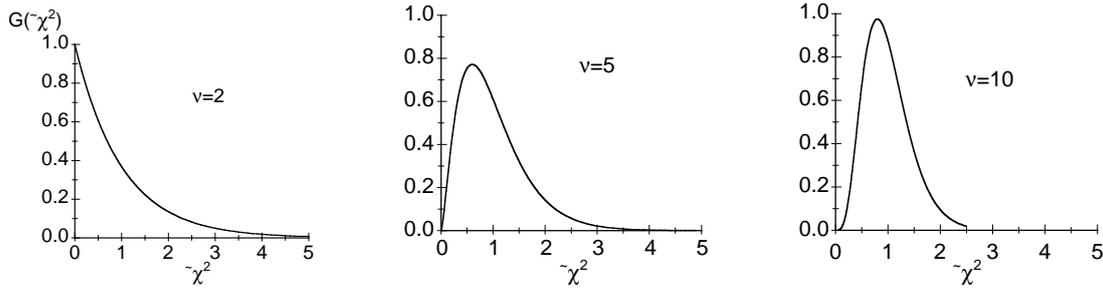


Figura 7.9: Distribuzioni del chi quadrato ridotto $G_\nu(\tilde{\chi}^2)$ per $\nu = 2$, $\nu = 5$ e $\nu = 10$. Il valor medio delle distribuzioni è sempre 1. La varianza diminuisce al crescere di ν .

7.6.5 Chi quadrato ridotto

Spesso, per misurare la discrepanza tra teoria ed esperimento, si utilizza il *chi quadrato ridotto* $\tilde{\chi}^2$, definito come il rapporto tra il chi quadrato χ^2 dell'eq. (7.6.2) ed il numero di gradi di libertà ν

$$\tilde{\chi}^2 = \chi^2/\nu. \quad (7.6.15)$$

L'attesa $\chi^2 \simeq \nu$ si traduce quindi nell'attesa $\tilde{\chi}^2 \simeq 1$.

In modo analogo alle distribuzioni del chi quadrato, è possibile calcolare anche le distribuzioni $G_\nu(\tilde{\chi}^2)$ del chi quadrato ridotto (vedi Fig. 7.9). Come si può vedere, la distribuzione del $\tilde{\chi}^2$ si restringe al crescere del numero ν di gradi di libertà.

7.6.6 Tabelle del chi quadrato

Vediamo ora come la conoscenza della distribuzione $G_\nu(\chi^2)$ del chi quadrato può servirci per verificare la bontà di un'ipotesi teorica.

Supponiamo di avere eseguito un'esperimento che ha portato ad \mathcal{N} valori sperimentali O_k , e di avere fatto un'ipotesi di interpretazione teorica che comporta \mathcal{N} valori attesi E_k . A questo punto conosciamo anche il numero di gradi di libertà ν del problema.

Calcoliamo il chi quadrato utilizzando l'eq. (7.6.2):

$$\chi_o^2 = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{(O_k - E_k)^2}{\sigma_k^2}; \quad (7.6.16)$$

l'indice o sta qui per *osservato*, e serve a distinguere il valore del chi quadrato relativo al nostro esperimento dal valore generico.

Il problema che ci poniamo ora è il seguente: la discrepanza tra teoria ed esperimento che abbiamo rilevato, e che è misurata da χ_o^2 , può essere attribuita solo a cause statistiche, cioè all'inevitabile presenza di fluttuazioni casuali dei valori osservati O_k rispetto ai valori attesi E_k ?

Se questa ipotesi è corretta, i valori attesi del χ^2 dovuti a cause puramente statistiche sono dati dalla distribuzione $G_\nu(\chi^2)$.

Più precisamente, poiché $G_\nu(\chi^2)$ è una densità di probabilità, l'integrale

$$\int_0^{\chi_o^2} G_\nu(\chi^2) d\chi^2 = \mathcal{P} [\chi^2 < \chi_o^2] \quad (7.6.17)$$

dà la probabilità di ottenere un valore *inferiore* a quello effettivamente osservato χ_o^2 .

Viceversa l'integrale

$$\int_{\chi_o^2}^{\infty} G_\nu(\chi^2) d\chi^2 = \mathcal{P} [\chi^2 > \chi_o^2] \quad (7.6.18)$$

dà la probabilità di ottenere un valore *superiore* a quello effettivamente osservato χ_o^2 .

Analoghe espressioni si possono utilizzare se si lavora con il chi quadrato ridotto:

$$\int_0^{\tilde{\chi}_0^2} G_\nu(\tilde{\chi}^2) d\tilde{\chi}^2 = \mathcal{P} [\tilde{\chi}^2 < \tilde{\chi}_0^2] \quad (7.6.19)$$

$$\int_{\tilde{\chi}_0^2}^{\infty} G_\nu(\tilde{\chi}^2) d\tilde{\chi}^2 = \mathcal{P} [\tilde{\chi}^2 > \tilde{\chi}_0^2] \quad (7.6.20)$$

Il calcolo degli integrali (7.6.17–20) non è elementare; i corrispondenti valori si possono trovare tabulati sotto varie forme (vedi Appendice D.5).

Ovviamente la conoscenza di uno degli integrali equivale alla conoscenza degli altri.

Il confronto tra i valori osservati χ_o^2 oppure $\tilde{\chi}_o^2$ e le tabelle degli integrali (7.6.17–20) non consente comunque di decidere in modo deterministico della bontà di un'ipotesi teorica, ma fornisce solo un criterio di natura probabilistica.

Ad esempio, se la probabilità $\mathcal{P} [\tilde{\chi}^2 > \tilde{\chi}_0^2]$ è elevata, è plausibile ritenere che l'ipotesi teorica sia compatibile con i dati sperimentali. Se la stessa probabilità è piccola, c'è motivo di dubitare dell'ipotesi teorica.

Convenzionalmente si usa dire che se $\mathcal{P} [\tilde{\chi}^2 > \tilde{\chi}_0^2] \simeq 0.05$ c'è un *disaccordo significativo* tra teoria ed esperimento; se $\mathcal{P} [\tilde{\chi}^2 > \tilde{\chi}_0^2] \simeq 0.01$ il disaccordo è considerato *altamente significativo*.

Va comunque sempre tenuto presente che l'affidabilità del test del chi quadrato dipende dalla corretta valutazione delle incertezze σ_k in fase sperimentale. Un χ^2 molto elevato, corrispondente ad un valore molto basso di $\mathcal{P} [\tilde{\chi}^2 > \tilde{\chi}_0^2]$, potrebbe anche essere dovuto ad una sottostima delle incertezze, ad esempio per l'influenza di errori sistematici non riconosciuti. Valori molto bassi del χ^2 , corrispondenti a valori molto alti di $\mathcal{P} [\tilde{\chi}^2 > \tilde{\chi}_0^2]$, sono generalmente attribuibili ad una sovrastima delle incertezze.

7.7 Propagazione dell'incertezza e indipendenza statistica: covarianza

Al § 4.6 abbiamo affrontato il problema della propagazione dell'incertezza da un certo numero di grandezze X, Y, Z, \dots misurate direttamente ad una grandezza $Q = f(X, Y, Z, \dots)$ misurata indirettamente. In quell'occasione abbiamo introdotto il concetto di *indipendenza statistica* delle misure dirette. Abbiamo quindi visto che, se le misure di X, Y, Z, \dots sono statisticamente indipendenti, l'incertezza si propaga secondo l'equazione

$$\delta Q \simeq \sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_0^2 (\delta X)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial Y}\right)_0^2 (\delta Y)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial Z}\right)_0^2 (\delta Z)^2 + \dots} \quad (7.7.1)$$

Se invece le misure di X, Y, Z, \dots *non* sono statisticamente indipendenti, si può comunque stabilire un limite superiore all'incertezza su Q , dato dall'equazione

$$(\delta Q)_{\max} = \left|\frac{\partial Q}{\partial X}\right|_0 \delta X + \left|\frac{\partial Q}{\partial Y}\right|_0 \delta Y + \left|\frac{\partial Q}{\partial Z}\right|_0 \delta Z + \dots \quad (7.7.2)$$

Vogliamo qui approfondire il significato di indipendenza statistica delle misure; per esprimere quantitativamente il grado di *correlazione* tra i valori di misura, definiremo un nuovo parametro statistico, la *covarianza*; al termine saremo in grado di fornire una dimostrazione per l'eq. (7.7.2).

Per semplificare la notazione, ci limitiamo al caso di due sole grandezze misurate direttamente, $Q = Q(X, Y)$. L'estensione ad altri casi è concettualmente semplice.

Supponiamo di ripetere N volte la misurazione diretta delle due grandezze X e Y . Per ogni misurazione otterremo una coppia di valori (x_i, y_i) . Al termine delle misurazioni, avremo due distribuzioni campionarie: una dei valori x , con media m_x^* e varianza D_x^* , l'altra dei valori y , con media m_y^* e varianza D_y^* .

In accordo con quanto visto in precedenza (§ 4.3), assumeremo come valori centrali le medie campionarie:

$$X_0 = m_x^*, \quad Y_0 = m_y^* \quad (7.7.3)$$

e come incertezze le stime degli scarti tipo delle distribuzioni delle medie campionarie:

$$\delta X = \tilde{\sigma}[m_x^*] = \sqrt{\frac{D_x^*}{N-1}}, \quad \delta Y = \tilde{\sigma}[m_y^*] = \sqrt{\frac{D_y^*}{N-1}}. \quad (7.7.4)$$

Ad ogni coppia di valori (x_i, y_i) corrisponde un valore della grandezza Q : $q_i = f(x_i, y_i)$. Si può quindi pensare ad una distribuzione campionaria dei valori q_i , con media m_q^* e varianza D_q^* , per cui valore centrale ed incertezza di Q sono dati da:

$$Q_0 = m_q^* \quad \delta Q = \sqrt{\frac{D_q^*}{(N-1)}}. \quad (7.7.5)$$

Vogliamo ora trovare una relazione analitica che colleghi il valore centrale Q_0 ai valori centrali X_0, Y_0 e l'incertezza δQ alle incertezze $\delta X, \delta Y$. Per semplificare le notazioni, anziché considerare le incertezze $\delta X, \delta Y, \delta Q$, lavoreremo direttamente sulle varianze D_x^*, D_y^*, D_q^* .

7.7.1 Sviluppi in serie di Taylor

La procedura che vogliamo seguire si basa sullo sviluppo di una funzione in serie di Taylor.

Iniziamo ricordando che, per una funzione $Q = f(X)$ di una sola variabile X , il generico valore $q_i = f(x_i)$ è esprimibile mediante lo sviluppo in serie di Taylor nell'intorno di un dato valore $q_0 = f(x_0)$:

$$q_i = f(x_i) = \underbrace{f(x_0) + \left(\frac{dQ}{dX}\right)_0 (x_i - x_0)}_{\text{termini lineari}} + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2Q}{dX^2}\right)_0 (x_i - x_0)^2 + [O.S.]. \quad (7.7.6)$$

L'indice 0 indica che le derivate vanno calcolate per $x = 0$, mentre la scrittura $[O.S.]$ indica globalmente i termini di ordine superiore (in questo caso dal terzo in avanti). I termini dello sviluppo fino al primo ordine rappresentano l'*approssimazione lineare* della funzione.

Per una funzione $Q = f(X, Y)$ di due variabili X, Y lo sviluppo in serie di Taylor è

$$q_i = f(x_i, y_i) = \underbrace{f(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_0 (x_i - x_0) + \left(\frac{\partial Q}{\partial Y}\right)_0 (y_i - y_0)}_{\text{termini lineari}} + [O.S.]. \quad (7.7.7)$$

7.7.2 Media, varianza e covarianza

Applichiamo ora l'eq. (7.7.7) al nostro caso, sostituendo i valori x_0, y_0 con m_x^*, m_y^* . Se le distribuzioni dei valori misurati x_i e y_i sono sufficientemente strette, ci si può fermare ai termini del primo ordine nello sviluppo in serie e trascurare i termini di ordine superiore. Limitarsi ai termini del primo ordine significa lavorare in approssimazione di linearità locale (si rivedano i § 4.6.3 e 4.6.4).

Calcoliamo per prima cosa il valore centrale di Q , sostituendo al generico valore q_i l'espressione (7.7.7) troncata al primo ordine:

$$\begin{aligned} Q_0 &= m_q^* = \frac{1}{N} \sum_i q_i \\ &\simeq \frac{1}{N} \sum_i \left[Q(m_x^*, m_y^*) + \left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_0 (x_i - m_x^*) + \left(\frac{\partial Q}{\partial Y}\right)_0 (y_i - m_y^*) \right] = Q(m_x^*, m_y^*) \end{aligned} \quad (7.7.8)$$

L'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che $\sum(x_i - m_x^*) = \sum(y_i - m_y^*) = 0$. Abbiamo così ritrovato l'espressione $Q_0 \simeq f(X_0, Y_0)$ già introdotta nell'eq. (4.6.14).

La varianza campionaria D_q^* di Q si può valutare utilizzando l'espressione di m_q^* ottenuta nell'eq. (7.7.8):

$$\begin{aligned} D_q^* &= \frac{1}{N} \sum_i (q_i - m_q^*)^2 \\ &\simeq \frac{1}{N} \sum_i \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial X} \right)_0 (x_i - m_x^*) + \left(\frac{\partial Q}{\partial Y} \right)_0 (y_i - m_y^*) \right]^2 \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial X} \right)_0^2 D_x^* + \left(\frac{\partial Q}{\partial Y} \right)_0^2 D_y^* + 2 \left(\frac{\partial Q}{\partial X} \right)_0 \left(\frac{\partial Q}{\partial Y} \right)_0 \sigma_{xy}^* \end{aligned} \quad (7.7.9)$$

dove

$$D_x^* = \frac{1}{N} \sum_i (x_i - m_x^*)^2 \quad \text{e} \quad D_y^* = \frac{1}{N} \sum_i (y_i - m_y^*)^2 \quad (7.7.10)$$

sono le varianze campionarie delle misure di X, Y , mentre

$$\sigma_{xy}^* = \frac{1}{N} \sum_i (x_i - m_x^*)(y_i - m_y^*) \quad ()$$

è la **covarianza** campionaria delle misure di X e Y . La covarianza misura il grado di correlazione tra gli scarti delle misure di X e gli scarti delle misure di Y .

7.7.3 Misure indipendenti

Se gli scarti dalla media delle misure di X e di Y sono tra di loro completamente indipendenti, la covarianza $\sigma_{xy}^* \rightarrow 0$ per $N \rightarrow \infty$. In tal caso potremo scrivere la formula di propagazione dell'incertezza nella forma

$$(\delta Q)^2 = \left(\frac{\partial Q}{\partial X} \right)_0^2 (\delta X)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial Y} \right)_0^2 (\delta Y)^2. \quad (7.7.12)$$

L'eq. (7.7.1) non è altro che la generalizzazione dell'eq. (7.7.12) al caso generico $Q = f(X, Y, Z, \dots)$.

7.7.4 Misure non indipendenti

L'eq. (7.7.9) dà l'espressione generale per la varianza della distribuzione dei valori q_i :

$$D_q^* = \left(\frac{\partial Q}{\partial X} \right)_0^2 D_x^* + \left(\frac{\partial Q}{\partial Y} \right)_0^2 D_y^* + 2 \left(\frac{\partial Q}{\partial X} \right)_0 \left(\frac{\partial Q}{\partial Y} \right)_0 \sigma_{xy}^*, \quad (7.7.13)$$

a cui è legata l'incertezza δQ tramite l'eq. (7.7.5). L'effetto della correlazione tra le misure di X e Y è tenuto in conto dall'ultimo termine, contenente la covarianza. Questo termine, a seconda dei casi, può essere positivo o negativo.

Le varianze D_x^*, D_y^* e la covarianza σ_{xy}^* sono legate dalla *disuguaglianza di Schwartz*:

$$(\sigma_{xy}^*)^2 \leq D_x^* D_y^*, \quad \text{cioe' } |\sigma_{xy}^*| \leq \sqrt{D_x^* D_y^*}. \quad (7.7.14)$$

Nota: La disuguaglianza di Schwartz nel nostro caso può essere facilmente dimostrata considerando la funzione $A(t)$ del generico parametro t definita come segue:

$$\begin{aligned} A(t) &= (1/N) \sum_i [(x_i - m_x^*) + t(y_i - m_y^*)]^2 \\ &= D_x^* + 2t \sigma_{xy}^* + t^2 D_y^*. \end{aligned} \quad (7.7.15)$$

Per qualsiasi valore di t si ha evidentemente $A(t) \geq 0$. Se ora sostituiamo $t = -\sigma_{xy}^*/D_y^*$ ritroviamo l'espressione della disuguaglianza di Schwartz.

Come conseguenza della disuguaglianza di Schwartz, a partire dall'eq. (7.7.13) si può ricavare l'espressione per l'**incertezza massima** sulla variabile Q :

$$(\delta Q) \leq \left| \frac{\partial Q}{\partial X} \right|_{m_x^*} \delta X + \left| \frac{\partial Q}{\partial Y} \right|_{m_y^*} \delta Y. \quad (7.7.16)$$

L'eq. (7.7.2) non è altro che la generalizzazione dell'eq. (7.7.16) al caso generico $Q = f(X, Y, Z, \dots)$.

7.8 Coefficiente di correlazione lineare

Nel § 4.7 abbiamo introdotto la problematica relativa alla correlazione tra due grandezze X e Y . Abbiamo fatto alcuni esempi (si veda in particolare la Fig. 4.13), e ci siamo poi focalizzati sul caso in cui i valori delle due grandezze si possono ragionevolmente collegare mediante una relazione analitica $y = f(x)$. Il problema è stato affrontato a livello fenomenologico sempre al § 4.7, con l'introduzione della tecnica di regressione lineare, ed in modo più approfondito e generalizzato al § 7.5, dedicato al metodo dei minimi quadrati.

Riprendiamo qui l'argomento della correlazione tra due grandezze fisiche X e Y , affrontandolo da un punto di vista più generale. Lo scopo è trovare un metodo che consenta di valutare il grado di correlazione anche nel caso in cui non sia possibile evidenziare una relazione funzionale $y = f(x)$. Si riconsideri, in proposito, l'esempio 1 del § 4.7.1 e la corrispondente Fig. 4.13 (a sinistra).

7.8.1 Varianza e covarianza campionarie

Richiamiamo innanzitutto i concetti di varianza e covarianza, già introdotti al precedente § 7.7.2. Una volta misurate N coppie di valori x_j, y_j , varianze e scarti quadratici medi campionari delle due grandezze X e Y si calcolano mediante le formule:

$$\begin{aligned} D_x^* &= (1/N) \sum (x_j - m_x^*)^2; & \sigma_x^* &= \sqrt{(1/N) \sum (x_j - m_x^*)^2}; \\ D_y^* &= (1/N) \sum (y_j - m_y^*)^2; & \sigma_y^* &= \sqrt{(1/N) \sum (y_j - m_y^*)^2}. \end{aligned} \quad (7.8.1)$$

La covarianza campionaria è data da

$$\sigma_{xy}^* = (1/N) \sum (x_j - m_x^*)(y_j - m_y^*). \quad (7.8.2)$$

È importante notare la differenza nell'uso di varianza e covarianza che si fa qui rispetto all'uso che se ne è fatto al § 7.7.2.

Nel § 7.7.2 varianza e covarianza si riferiscono alle fluttuazioni casuali di due valori x_i e y_i intorno alla loro media; le due medie sono legate ai valori centrali delle due misure, varianze e covarianze sono legate alle rispettive incertezze.

Qui invece varianza e covarianza si riferiscono a N coppie di valori diversi delle due grandezze (di cui non si conoscono o si trascurano le incertezze).

7.8.2 Definizione del coefficiente di correlazione

Il coefficiente di correlazione lineare, indicato convenzionalmente con la lettera r , è definito come:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sum (x_j - m_x^*)(y_j - m_y^*)}{\sqrt{\sum (x_j - m_x^*)^2} \sqrt{\sum (y_j - m_y^*)^2}} \quad (7.8.3)$$

Come abbiamo visto al § 7.7.4, la disuguaglianza di Schwartz assicura che $|\sigma_{xy}| \leq \sigma_x \sigma_y$. Ciò significa che il coefficiente di correlazione lineare non può per definizione essere minore di -1 o maggiore di +1:

$$|r| \leq 1. \quad (7.8.4)$$

7.8.3 Correlazione lineare perfetta

Per comprendere il significato e l'uso del coefficiente di correlazione lineare r , è utile partire da un caso particolare. Supponiamo che le due grandezze X e Y siano collegate in modo esatto da una legge di tipo lineare:

$$Y = A + BX. \quad (7.8.5)$$

In tal caso, per qualsiasi coppia di valori x_i, y_i e per i valori medi m_x, m_y valgono le equazioni:

$$y_i = A + Bx_i \quad (7.8.6)$$

$$m_y = A + Bm_x \quad (7.8.7)$$

Sottraendo l'Eq. (7.8.7) dall'Eq. (7.8.6) si ottiene

$$y_i - m_y = B(x_i - m_x). \quad (7.8.8)$$

Tenendo conto dell'equazione (7.8.8) è ora facile verificare che l'espressione (7.8.3) del coefficiente di correlazione lineare si semplifica, nel caso di correlazione esatta, nel modo seguente:

$$r = \frac{B}{\sqrt{B}} = \frac{B}{|B|} = \begin{cases} +1 & \text{se } B > 0; \\ -1 & \text{se } B < 0 \end{cases} \quad (7.8.9)$$

I due valori estremi $r=1$ e $r=-1$ corrispondono dunque ad una relazione perfettamente lineare, con coefficiente angolare B rispettivamente positivo e negativo.

7.8.4 Interpretazione del coefficiente di correlazione

Come dobbiamo interpretare un valore generico di $-1 < r < 1$ ottenuto a partire da N coppie di valori sperimentali x_j, y_j utilizzando l'Eq. (7.8.3) ?

E' bene innanzitutto osservare che il coefficiente r è determinato a partire da un campione sperimentale di dimensione finita, soggetto a fluttuazioni di natura casuale. r è pertanto una variabile aleatoria.

Partiamo dall'ipotesi che le due grandezze X e Y siano *completamente scorrelate*. In questo caso, al crescere del numero N di osservazioni ci si aspetta che la covarianza σ_{xy}^* tenda a stabilizzarsi intorno al valore zero: per $N \rightarrow \infty, \sigma_{xy}^* \rightarrow 0$.

Per un numero finito N di osservazioni, la covarianza campionaria σ_{xy}^* non è generalmente nulla, anche se le due grandezze sono completamente scorrelate; il suo valore dipende inoltre dal particolare campionamento. Indichiamo con r_o il coefficiente di correlazione calcolato mediante l'Eq. (7.8.3) ("o" sta per "osservato"). La grandezza r_o è una variabile aleatoria. È possibile calcolare la distribuzione della variabile aleatoria r_o in funzione del numero N di osservazioni. Una volta nota la distribuzione, se ne possono calcolare gli integrali e tabularne i valori, come si fa per la distribuzione gaussiana o la distribuzione del χ^2 . In genere vengono tabulati, per selezionati valori di N e di r_o , i valori della probabilità

$$P_N(|r| \geq r_o)$$

ovvero della probabilità che, per una coppia di grandezze X e Y completamente scorrelate, il coefficiente di correlazione r sia maggiore del valore r_o (vedi Appendice D.6).

Veniamo ora al caso concreto di due grandezze qualsiasi X e Y , di cui si voglia valutare il grado di correlazione a partire da un numero finito N di coppie di valori misurati x_j, y_j . Ovviamente la valutazione avrà carattere probabilistico.

Si calcola, a partire dai valori misurati x_j, y_j , il coefficiente di correlazione osservato r_o mediante l'Eq. (7.8.3). Si consulta poi una tabella dei valori di probabilità per la distribuzione di r .

Se $P_N(|r| \geq r_o) < 5\%$, la correlazione tra le due grandezze è detta *significativa*.

Se $P_N(|r| \geq r_o) < 1\%$, la correlazione tra le due grandezze è detta *altamente significativa*.

Parte III

Appendici

Appendice A

Rappresentazione dei dati sperimentali

A.1 Cifre significative e arrotondamenti

Nella pratica scientifica e tecnologica si ha talora a che fare con *valori numerici esatti*.

Esempio: Il conteggio degli elementi di un insieme dà un numero intero esatto.

Esempio: Il valore della funzione seno, in corrispondenza dell'argomento $\pi/6$, può essere espresso con esattezza: $\sin(\pi/6) = 0.5$.

Esempio: La velocità della luce c , espressa in metri al secondo, ha il valore numerico esatto 299792458 (§2.3).

Più spesso si ha a che fare con *valori numerici approssimati*.

Esempio: Il risultato della misurazione di una grandezza fisica è sempre un valore approssimato; l'entità dell'approssimazione è misurata dall'incertezza della misura (Cap. 4).

Esempio: Il valore della funzione coseno, in corrispondenza dell'argomento $\pi/6$, può essere espresso solo in modo approssimato, a seconda del grado di precisione desiderato; ad esempio $\cos(\pi/6) \simeq 0.866$, oppure $\cos(\pi/6) \simeq 0.8660254$, etc.

Esempio: Molto spesso il valore numerico della velocità della luce viene approssimato mediante una procedura di arrotondamento (descritta più avanti): ad esempio $c \simeq 3 \times 10^8$ m/s.

A.1.1 Cifre significative

Le *cifre significative* (in inglese *significant digits*) di un valore numerico approssimato ne individuano la precisione. Il numero di cifre significative in un valore numerico approssimato si ottiene contando le cifre da sinistra verso destra, a partire dalla prima cifra diversa da zero. Gli eventuali zeri a sinistra delle cifre significative hanno valore puramente posizionale.

Ad esempio:

il numero	25.04	ha 4 cifre significative:	2 5 0 4
il numero	0.0037	ha 2 cifre significative:	3 7
il numero	0.50	ha 2 cifre significative:	5 0

Il conteggio delle cifre significative non è ovvio quando il valore numerico è intero e termina con uno o più zeri, ad esempio: 350 oppure 47000. In tali casi è necessario sapere se uno o più zeri hanno valore puramente posizionale anziché significativo. La notazione scientifica consente di evitare equivoci.

Esempio: Consideriamo il valore 2700. In notazione scientifica il valore andrà scritto diversamente a seconda del numero di zeri considerati significativi:

$$\begin{aligned}
 2700 &= 2.7 \times 10^3 && (2 \text{ cifre significative}) \\
 &= 2.70 \times 10^3 && (3 \text{ cifre significative}) \\
 &= 2.700 \times 10^3 && (4 \text{ cifre significative})
 \end{aligned}$$

Delle cifre significative di un valore numerico:

- la prima cifra è detta *cifra più significativa* (in inglese *most significant digit*);
- l'ultima cifra è detta *cifra meno significativa* (in inglese *least significant digit*).

Nota: Talora l'incertezza di una misura, anziché venire esplicitamente indicata nella forma $\pm\delta X$, è implicitamente sottintesa nel numero di cifre significative utilizzate. Ad esempio:

$$\begin{aligned}
 X = 2.47 \text{ m} & \quad \text{sta per} \quad X = (2.47 \pm 0.005) \text{ m} \\
 X = 2.470 \text{ m} & \quad \text{sta per} \quad X = (2.470 \pm 0.0005) \text{ m}
 \end{aligned}$$

Questo modo di rappresentare i valori di misura andrebbe comunque evitato, in quanto in molti casi non consente una indicazione sufficientemente precisa dell'incertezza e può dare origine ad interpretazioni non univoche.

A.1.2 Regole per l'arrotondamento

Talora è necessario ridurre il numero di cifre significative di un valore numerico. In tal caso la cifra meno significativa rimasta va arrotondata secondo le regole seguenti.

- a) Se la cifra più significativa da eliminare è 0, 1, 2, 3, 4, allora la cifra meno significativa rimasta resta inalterata (*arrotondamento per difetto*).
Esempio: $12.34 \simeq 12.3$
- b) Se la cifra più significativa da eliminare è 6, 7, 8, 9 oppure 5 seguito da almeno una cifra diversa da zero, allora la cifra meno significativa rimasta viene maggiorata di un'unità (*arrotondamento per eccesso*).
Esempio: $12.355 \simeq 12.4$
Esempio: $12.365 \simeq 12.4$
- c) Se la cifra più significativa da eliminare è 5 seguito solo da zeri, allora la cifra meno significativa rimasta resta inalterata quando è pari, viene maggiorata di un'unità quando è dispari (*regola del numero pari*).
Esempio: $12.35 \simeq 12.4$
Esempio: $12.45 \simeq 12.4$

Le regole suesposte, e in particolare la regola del numero pari, sono costruite in modo che il valor medio di un insieme di valori numerici venga modificato meno possibile dall'operazione di arrotondamento.

A.1.3 Arrotondamento nei risultati dei calcoli

Quando si eseguono dei calcoli su *valori numerici approssimati*, le cifre del risultato non sono in genere tutte significative; il risultato andrà perciò arrotondato in modo da mantenere solo le cifre significative.

Non esistono regole rigorose e sempre valide per decidere quante cifre sono significative in un risultato. Si possono comunque dare alcune indicazioni di massima.

Nel caso di **addizioni e sottrazioni** di numeri approssimati: le cifre di una somma o una differenza non sono significative alla destra della posizione che corrisponde alla cifra meno significativa in uno qualsiasi dei termini da sommare o sottrarre.

Esempio: Supponiamo di voler addizionare i seguenti tre numeri approssimati: 2.456, 0.5, 3.35; il secondo numero non ha cifre significative oltre la prima posizione decimale, pertanto anche

il risultato andrà arrotondato alla prima posizione dopo la virgola:

$$\begin{array}{rcl}
 2.456 & + & \\
 0.5 & + & \\
 3.35 & = & \\
 \hline
 6.306 & \rightarrow & 6.3
 \end{array}$$

Esempio: Si vuole calcolare il valor medio dei tre numeri approssimati: 19.90, 19.92, 19.95. Usando una calcolatrice tascabile si ottiene il valor medio 19.923333, che va arrotondato a 19.92.

Nel caso di **moltiplicazioni e divisioni** di numeri approssimati: se il numero che ha meno cifre significative ne ha n , è ragionevole arrotondare il risultato all' n -ma cifra significativa, in taluni casi anche all' $(n+1)$ -ma. Le **radici quadrate** di numeri approssimati vanno generalmente arrotondate allo stesso numero di cifre significative del radicando.

Esempio: Si calcola il prodotto dei due numeri approssimati 6.83 e 72 utilizzando una calcolatrice tascabile. Il risultato 491.76 va arrotondato a due cifre significative: 4.9×10^2 .

Esempio: Si calcola il quoziente del numero approssimato 83.642 per il numero approssimato 72 utilizzando una calcolatrice tascabile. Il risultato 1.1616944 può essere arrotondato a 2 cifre significative, 1.2, ma in questo caso è preferibile tenere anche la terza cifra: 1.16.

Esempio: Si calcola la radice quadrata di 30.74 con una calcolatrice tascabile. Il risultato $\sqrt{30.74} = 5.5443665$ va arrotondato a 5.544.

Esempio: Si vuole calcolare la tangente trigonometrica di un angolo di 27° come rapporto tra i valori del seno e del coseno approssimati a 2 cifre significative: $\sin(27^\circ) \simeq 0.45$ e $\cos(27^\circ) \simeq 0.89$. Eseguendo il rapporto con una calcolatrice tascabile si ottiene il valore numerico 0.505618, che va approssimato a 0.51 o a 0.506; calcolando direttamente il valore della tangente con la stessa calcolatrice si otterrebbe $\tan(27^\circ) \simeq 0.5095398$.

A.1.4 Cifre significative e incertezza delle misure

Nel caso delle misure di grandezze fisiche, come abbiamo già osservato, l'incertezza determina il numero di cifre significative. D'altro lato il calcolo stesso dell'incertezza spesso richiede l'utilizzo delle tecniche di arrotondamento. Ricordiamo innanzitutto due regole pratiche dettate dal buon senso.

- L'incertezza δX va espressa con non più di due cifre significative (si vedano gli esempi della Tabella in Appendice D.2). In molti casi può essere sufficiente una sola cifra significativa.
- Nell'espressione di una misura nella forma $X_0 \pm \delta X$, l'ultima cifra significativa del valore centrale X_0 deve essere dello stesso ordine di grandezza dell'ultima cifra significativa dell'incertezza (si vedano ancora gli esempi della Tabella nell'Appendice D.2).

Nel caso di misurazioni ripetute affette da errori casuali il valore centrale X_0 e l'incertezza δX vengono stimati a partire dai dati sperimentali attraverso una serie di operazioni (introdotte e giustificate ai §4.3 e 7.3):

$$X_0 = \frac{1}{N} \sum x_i; \quad \delta X = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum (x_i - m^*)^2} \quad (\text{A.1.1})$$

e devono generalmente venire arrotondati applicando le due regole precedenti.

Esempio: Si ripete $N=6$ volte la misurazione del periodo \mathcal{T} di oscillazione di un pendolo con un cronometro centesimale. Si ottengono i sei valori

$$2.15, 2.14, 2.17, 2.15, 2.16, 2.17$$

Eseguendo i calcoli delle eq. (A.1.1) con una calcolatrice tascabile si ottengono i valori approssimati

$$\mathcal{T} = 2.1566667 \text{ s} ; \delta\mathcal{T} = 0.004944 \text{ s}$$

che vanno arrotondati, applicando le regole pratiche enunciate sopra,

$$\mathcal{T} = 2.157 \text{ s} ; \delta\mathcal{T} = 0.005 \text{ s}$$

Esempio: Il calcolo dell'incertezza dovuta ad errori casuali porta ad un'incertezza $\delta X = 0.015 \text{ mm}$ nel valore di una lunghezza. In questo caso non è opportuno arrotondare l'incertezza ad una sola cifra significativa, $\delta X = 0.01 \text{ mm}$, in quanto così facendo si eliminerebbe un contributo all'incertezza dell'ordine del 50 %.

Nelle misure indirette, sia il valore centrale che l'incertezza vengono ottenuti con calcoli eseguiti a partire da valori e incertezze misurati direttamente. Anche in questi casi è in genere necessario procedere all'arrotondamento dei risultati.

Esempio: Si misura il lato a di un quadrato con un regolo millimetrato, e si ottiene la misura $a = (23 \pm 0.5) \text{ mm}$ con due cifre significative. Si calcola ora la lunghezza della diagonale d sfruttando la relazione $d = a\sqrt{2}$ e utilizzando una calcolatrice tascabile. Si ottiene $d = 32.526912 \text{ mm}$. Ovviamente solo le prime 2 o al massimo 3 cifre del risultato sono significative, per cui scriveremo $d = 32.5 \text{ mm}$.

Esempio: Si misura l'accelerazione di gravità g a partire dalle misure di lunghezza ℓ e periodo \mathcal{T} di un pendolo: $g = (2\pi/\mathcal{T})^2 \ell$. Si ottiene:

$$g_0 = 9.801357 \text{ m s}^{-2} ; \quad \delta g = 0.023794 \text{ m s}^{-2}$$

L'incertezza va arrotondata al valore $\delta g = 0.024 \text{ m s}^{-2}$ o addirittura $\delta g = 0.02 \text{ m s}^{-2}$ (la scelta tra una o due cifre significative dipende dalla precisione con cui sono state valutate le incertezze nelle misure dirette di ℓ e \mathcal{T}). Il valore di g_0 va arrotondato:

$$g = g_0 \pm \delta g = (9.801 \pm 0.024) \text{ m s}^{-2}.$$

A.2 Tabelle

Le *tabelle* costituiscono un modo efficace e sintetico per presentare entità tra di loro correlate.

Esempio: Nell'Appendice D.1 una tabella è usata per collegare i nomi ed i simboli delle lettere greche maiuscole e minuscole.

A.2.1 Tabelle matematiche

Alcune funzioni $y = f(x)$ non sono valutabili per mezzo di algoritmi analitici elementari e veloci: il calcolo richiede procedure laboriose, che conviene eseguire una volta per tutte.

È frequente in questi casi l'uso di tabelle in cui i valori y_i della funzione vengono presentati in corrispondenza a valori selezionati x_i della variabile indipendente. Le cifre significative riportate in tabella indicano la precisione con cui è stato eseguito il calcolo.

Esempio 1: Prima dell'avvento e della rapida diffusione delle calcolatrici tascabili negli anni 70, i valori delle funzioni trigonometriche, dell'esponenziale, dei logaritmi venivano desunti da tabelle appositamente compilate, del tipo

Angolo (gradi)	Angolo (rad)	Seno	Coseno	Tangente
0°	0.000	0.000	1.000	0.000
2°	0.035	0.035	0.999	0.035
4°	0.070	0.070	0.998	0.070
6°	0.105	0.105	0.995	0.105
8°	0.140	0.139	0.990	0.141
...

Esempio 2: In Appendice D.3 sono riportati in forma tabulare i valori di alcuni integrali della funzione normale standard: $\phi(z) = (1/\sqrt{2\pi}) \exp[-z^2/2]$.

A.2.2 Tabelle fisiche

Le tabelle sono frequentemente utilizzate per confrontare ed eventualmente correlare le misure di due o più grandezze fisiche. Ad ogni grandezza è riservata una colonna. Nella prima riga di ogni colonna viene indicato il nome della grandezza fisica e l'unità di misura utilizzata.

Ad esempio, le Tabelle 1, 2 e 3 riportano i risultati della misurazione del periodo di oscillazione di un pendolo in funzione della sua lunghezza.

I valori delle grandezze fisiche devono essere accompagnati dalle rispettive incertezze, nella consueta forma $X_0 \pm \delta X$ (Tab. 1). Se l'incertezza è uguale per tutti i valori di una grandezza fisica (cioè di una colonna), essa può venire indicata una volta per tutte nella prima riga della colonna (Tab. 2). Se in una tabella l'incertezza non viene indicata esplicitamente (Tab. 3), significa che essa è implicitamente sottintesa nel numero di cifre significative utilizzate (§A.1.a). Questo modo di rappresentare le incertezze andrebbe comunque evitato, in quanto può dar luogo ad ambiguità.

Tabella 1		Tabella 2		Tabella 3	
Lunghezza (cm)	Periodo (s)	Lunghezza (± 0.05 cm)	Periodo (± 0.005 cm)	Lunghezza (cm)	Periodo (s)
20 ± 0.05	0.89 ± 0.005	20	0.89	20.0	0.89
40 ± 0.05	1.26 ± 0.005	40	1.26	40.0	1.26
60 ± 0.05	1.55 ± 0.005	60	1.55	60.0	1.55
80 ± 0.05	1.79 ± 0.005	80	1.79	80.0	1.79

A.2.3 Interpolazione lineare

Consideriamo due colonne di una tabella, che riportano i valori di due grandezze fisiche X e Y . La tabella fornisce un numero finito di coppie di valori discreti (x_i, y_i) . Si presenta talora la necessità di conoscere il valore della grandezza Y in corrispondenza ad un valore \tilde{x} della grandezza X non riportato in tabella ma compreso tra due valori x_1, x_2 tabulati: $x_1 < \tilde{x} < x_2$. In tal caso si ricorre alla procedura di *interpolazione tabulare*: si cerca cioè si cerca di individuare un andamento analitico semplice della funzione $y = f(y)$ compatibile con i dati della tabella, e quindi si calcola $\tilde{y} = f(\tilde{x})$.

Il metodo più semplice, l'*interpolazione lineare*, si basa sull'ipotesi che la relazione tra X e Y sia con buona approssimazione lineare almeno localmente (cioè in corrispondenza dell'intervallo $x_1 - x_2$). In tal caso si può fare la proporzione:

$$\frac{\tilde{y} - y_1}{\tilde{x} - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \text{per cui} \quad \tilde{y} = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (\tilde{x} - x_1).$$

Talora la relazione tra X e Y non può essere considerata lineare nemmeno localmente. In tali casi l'interpolazione lineare è inadeguata, ed è necessario ricorrere a metodi di interpolazione più complessi, basati ad esempio su funzioni polinomiali di grado maggiore di uno.

A.2.4 Differenze tabulari

La natura della relazione funzionale $y = f(x)$ che meglio interpreta i dati di una tabella a due colonne può essere più agevolmente chiarita utilizzando metodi grafici (vedi § A.3 più avanti).

È tuttavia possibile individuare un eventuale andamento di tipo polinomiale della funzione $y = f(x)$ direttamente dai dati di una tabella, purché i valori x siano equispaziati. Il metodo si basa sull'analisi delle *differenze tabulari* $\Delta^n y$: una differenza tabulare prima, $\Delta^1 y$, è la differenza tra i valori y di due righe adiacenti; una differenza tabulare seconda, $\Delta^2 y$, è la differenza tra i valori $\Delta^1 y$

di due differenze tabulari prime adiacenti; e così via. La funzione $y = f(x)$ è ben approssimabile da un polinomio di grado m se le differenze tabulari di grado m sono circa zero.

Ad esempio, nella Tab. 4 a valori equispaziati della variabile X corrispondono valori di Y calcolati con un polinomio di terzo grado: $y = a + bx + cx^2$; sono mostrate le differenze tabulari dei primi tre ordini: le differenze di ordine tre sono nulle.

Tabella 4

x	$y = a + bx + cx^2$	$\Delta^1 y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	a			
1	$a + b + c$	$b + c$		
2	$a + 2b + 4c$	$b + 3c$	$2c$	0
3	$a + 3b + 9c$	$b + 5c$	$2c$	0
4	$a + 4b + 16c$	$b + 7c$		

A.3 Grafici

I grafici consentono di rappresentare in modo sintetico e suggestivo i valori di due o più quantità tra di loro correlate. In questo paragrafo prenderemo in considerazione solo i grafici in due dimensioni (x, y), con assi ortogonali. Le principali utilizzazioni dei grafici bidimensionali in Fisica sono:

- visualizzazione dell'andamento di una funzione $y = f(x)$ in una regione finita del suo dominio (Fig. A.1, a sinistra);
- studio della correlazione tra i valori misurati di due grandezze X e Y (Fig. A.1, a destra) ed eventuale individuazione di particolari dipendenze funzionali $y = f(x)$.

Nel seguito ci occuperemo solo di quest'ultimo uso dei grafici.

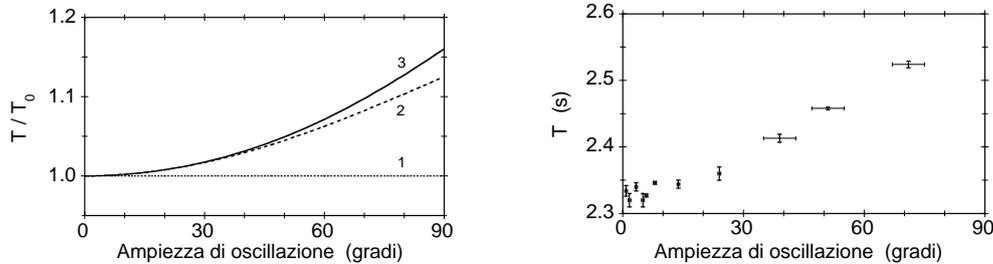


Figura A.1: Il periodo di oscillazione T di un pendolo dipende dall'ampiezza θ_0 di oscillazione secondo la legge: $T = T_0 [1 + (1/4) \sin^2(\theta_0/2) + (9/64) \sin^4(\theta_0/2) + \dots]$, dove $T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$. Il grafico di sinistra riporta il rapporto T/T_0 calcolato: le curve 2 e 3 si riferiscono rispettivamente alle approssimazioni di primo e secondo ordine. Il grafico di destra riporta valori sperimentali misurati con un pendolo di lunghezza $\ell = 136.9$ cm

A.3.1 Considerazioni generali

Nel disegnare un grafico è bene tener conto di alcune regole che consentono di renderlo più leggibile ed efficace.

- La variabile indipendente va generalmente rappresentata sull'asse delle ascisse.

- Se un grafico si riferisce a grandezze fisiche, è necessario indicare esplicitamente per ogni asse non solo il nome della corrispondente grandezza fisica, ma anche l'unità di misura utilizzata (Fig. A.1).
- Le scale sugli assi vanno scelte in modo che le coordinate di ogni punto sul grafico possano essere determinate velocemente e con facilità. Pertanto le tacche sugli assi vanno poste in corrispondenza a valori numerici equispaziati e il più possibile arrotondati: ad esempio 0, 2, 4, 6, oppure 0, 10, 20, 30. Sono da evitare, se possibile, valori non arrotondati, ad es. 1.2, 2.4, 3.6, 4.8. Sono sempre da evitare valori non equispaziati, ad es. 1.2, 2.35, 2.78, 3.5, anche se corrispondenti a valori misurati.
- Se i punti nel grafico corrispondono a dati sperimentali, le incertezze dei valori di misura vanno indicate mediante segmenti (detti convenzionalmente *barre d'errore*, in ingl. *error bars*): orizzontali per le grandezze in ascissa, verticali per le grandezze in ordinata (Fig. A.1, a destra).
- Il tipo di scala su ogni asse (scala lineare, semi-logaritmica, logaritmica, etc) può spesso essere scelto in modo che i punti del grafico si dispongano lungo una retta. Analizzeremo qui di seguito i più comuni tipi di scale utilizzati.

A.3.2 Grafici con scale lineari

I grafici con scale lineari sono utili per evidenziare relazioni di tipo lineare tra due grandezze x e y , del tipo $y = Bx$ (diretta proporzionalità) come in Fig. A.2 a sinistra, oppure $y = A + Bx$, come in Fig. A.2 a destra.

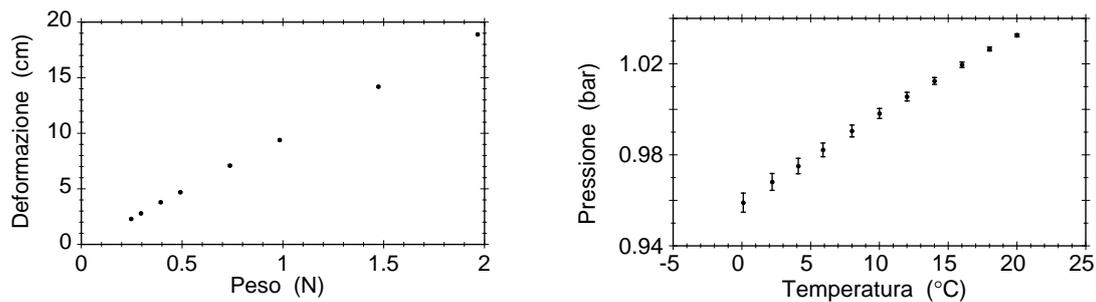


Figura A.2: Grafici con scale lineari. Il grafico di sinistra si riferisce alla deformazione di una molla misurata in funzione della forza applicata; le barre d'errore sono di dimensione inferiore ai simboli che individuano i punti sperimentali. Il grafico di destra si riferisce alla pressione di un gas misurata in funzione della temperatura, a volume costante; le barre d'errore verticali tengono conto dell'incertezza sia sulla temperatura che sulla pressione (procedura introdotta al § 4.7).

Una volta accertato l'andamento lineare della dipendenza della grandezza y dalla grandezza x , i parametri A e B e le rispettive incertezze δA e δB possono essere valutati

- a) in modo grafico, disegnando le rette di massima e minima pendenza compatibili con le barre d'errore dei punti sperimentali;
- b) in modo analitico, mediante la procedura di regressione lineare descritta e giustificata ai § 4.7 e 7.5.

La verifica della correttezza dell'ipotesi di linearità della relazione tra y e x può essere fatta a posteriori applicando il test del chi quadrato, descritto ai § 4.7 e 7.6.

A.3.3 Grafici semi-logaritmici

Relazioni funzionali di tipo esponenziale tra due quantità x e y

$$y = a e^{bx} \quad (\text{A.3.1})$$

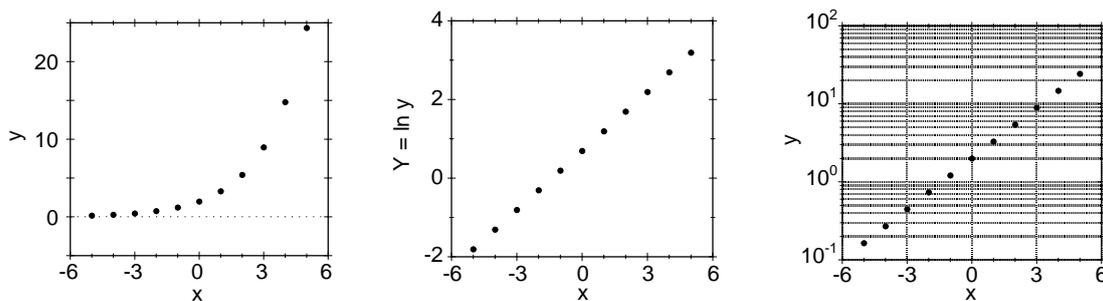


Figura A.3: Grafici di punti (x_i, y_i) disposti secondo una legge $y = a \exp(bx)$, con $a=2$, $b=0.5$. A sinistra i punti (x_i, y_i) sono rappresentati su un grafico con scale lineari. Al centro sono rappresentati i punti $(x_i, \ln y_i)$, sempre su scale lineari. A destra i punti (x_i, y_i) sono rappresentati in un grafico con scala verticale logaritmica.

(Fig. A.3, a sinistra) possono essere rese lineari riportando in grafico sull'asse delle ordinate il logaritmo naturale, $Y = \ln y$ anziché y (Fig. A.3, al centro). La relazione tra x e $Y = \ln y$ è lineare:

$$\ln y = \ln a + bx, \quad \text{cioè} \quad Y = A + bx. \quad (\text{A.3.2})$$

Il grafico logaritmico consente di verificare facilmente se i punti (x_i, Y_i) sono legati da una relazione lineare del tipo (A.3.2). I parametri $A = \ln a$ e b (intercetta e pendenza della retta) possono venire determinati mediante la procedura di regressione lineare descritta al §4.7. Alternativamente si possono graficare direttamente le coppie originali di valori (x_i, y_i) su carta semilogaritmica ovvero, se si utilizzano programmi di grafica al calcolatore, selezionando l'opzione *scala logaritmica* per l'asse delle ordinate (Fig. A.3, a destra).

Nota: L'argomento della funzione logaritmo deve essere adimensionale (§2.5). A rigore pertanto l'eq. (A.3.2) è valida solo se y è una grandezza adimensionale. In caso contrario sarebbe corretto considerare il rapporto adimensionale y/a e graficare $Y' = \ln(y/a)$. È comunque uso comune graficare $Y = \ln y$ anche se y è una grandezza dimensionata, sottintendendo che y non rappresenti la misura della grandezza, bensì solo il suo valore numerico (dipendente quindi dall'unità di misura utilizzata).

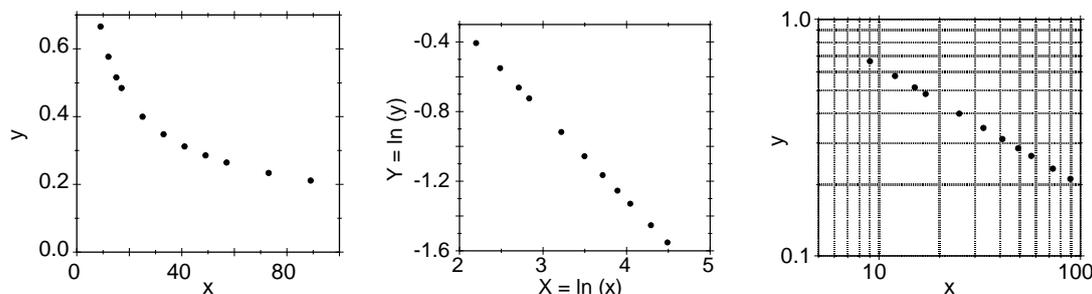


Figura A.4: Grafici di punti (x_i, y_i) disposti secondo una legge $y = a x^b$, con $a=2$, $b=-1/2$. A sinistra i punti (x_i, y_i) sono rappresentati su un grafico con scale lineari. Al centro sono rappresentati i punti $(\ln x_i, \ln y_i)$, sempre su scale lineari. A destra i punti (x_i, y_i) sono rappresentati in un grafico con scale orizzontale e verticale logaritmiche.

A.3.4 Grafici logaritmici

Relazioni funzionali tra due quantità x e y del tipo

$$y = a x^b \quad (\text{A.3.3})$$

(Fig. A.4, a sinistra) possono essere rese lineari riportando in grafico sull'asse delle ordinate il logaritmo $Y = \ln y$ anziché y e sull'asse delle ascisse il logaritmo $X = \ln x$ anziché x (Fig. A.4, al centro). La relazione tra $X = \ln x$ e $Y = \ln y$ è lineare:

$$\ln y = \ln a + b \ln x, \quad \text{cioe' } Y = A + bX. \quad (\text{A.3.4})$$

Il grafico logaritmico consente di verificare facilmente se i punti (X_i, Y_i) sono legati da una relazione lineare del tipo (A.3.4). I parametri $A = \ln a$ e b (intercetta e pendenza della retta) possono venire determinati mediante la procedura di regressione lineare descritta al §74.7. Alternativamente si possono graficare direttamente le coppie originali di valori (x_i, y_i) su carta logaritmica ovvero, se si utilizzano programmi di grafica al calcolatore, selezionando l'opzione *scala logaritmica* sia per l'asse delle ascisse che per l'asse delle ordinate (Fig. A.4, a destra).

A.3.5 Grafici con altre scale

Oltre alle scale logaritmiche, altre scale possono essere utilizzate per linearizzare particolari tipi di funzioni. Facciamo alcuni esempi.

- Una relazione del tipo $y = a\sqrt{x}$ può essere resa lineare riportando sull'asse delle ascisse \sqrt{x} anziché x , oppure riportando sull'asse delle ordinate y^2 anziché y . Ovviamente, poiché $y = a\sqrt{x}$ equivale a $y = ax^{1/2}$, la relazione può essere linearizzata anche con un grafico logaritmico, come abbiamo visto più sopra.
- Una relazione di proporzionalità inversa, del tipo $xy = K$, può essere linearizzata graficando y in funzione di K/x .

A.4 Istogrammi

Un istogramma è un particolare tipo di grafico in cui la quantità in ascissa assume valori discreti, in genere equispaziati, e il valore della quantità in ordinata è rappresentato graficamente dall'altezza di una colonnina.

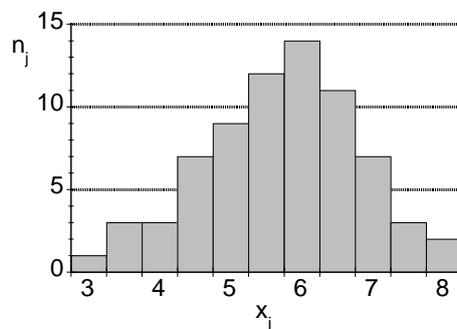


Figura A.5: Esempio di istogramma. L'asse delle ascisse, su cui è riportata la quantità x , è diviso in intervalli di ampiezza $\Delta x=0.5$. Se la quantità in ascissa è una grandezza fisica, è necessario accompagnare il suo simbolo con l'indicazione dell'unità di misura; ad esempio: ℓ (mm), \mathcal{T} (s), etc.

Gli \mathcal{N} valori discreti riportati in ascissa sono individuati da un indice j ($j = 1 \dots \mathcal{N}$). Spesso i valori discreti sull'asse delle ascisse corrispondono ad intervalli Δx_j di una quantità x (tipicamente una grandezza fisica) e la quantità in ordinata (altezza delle colonnine) è un numero intero n_j . In genere, ma non necessariamente, tutti gli intervalli di uno stesso istogramma hanno la medesima ampiezza Δx .

Ovviamente se la quantità x è una grandezza fisica si dovrà indicarne l'unità di misura.

Indicheremo con N la somma dei valori n_j di tutte le colonne:

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} n_j = N. \quad (\text{A.4.1})$$

Esempio 1: Si misura la lunghezza ℓ di N cilindretti metallici usando un calibro. La dispersione dei valori delle lunghezze dei diversi cilindretti può essere visualizzata mediante un istogramma come quello di Fig.A.5.

Esempio 2: Si ripete N volte la misurazione del periodo \mathcal{T} di oscillazione di un pendolo con un cronometro centesimale. La dispersione dei valori di misura dovuta agli errori casuali può essere visualizzata mediante un istogramma come quello di Fig.A.5; la larghezza degli intervalli di tempo in ascissa $\Delta\mathcal{T}_j$ corrisponde alla risoluzione delle misure (vedi Cap. 4).

A.4.1 Istogrammi normalizzati in altezza

In un *istogramma normalizzato in altezza* l'altezza di ogni colonna è proporzionale al rapporto n_j/N anziché al numero n_j .

Il rapporto

$$p_j^* = n_j/N \quad (\text{A.4.2})$$

rappresenta la *frequenza campionaria* di comparsa del valore j -mo.

È facile verificare che, qualunque sia il numero N di misure, per un istogramma normalizzato in altezza la somma delle altezze di tutte le colonne è unitaria:

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} n_j/N = 1. \quad (\text{A.4.3})$$

La normalizzazione in altezza è necessaria quando si vogliono confrontare istogrammi relativi alla stessa quantità x in ascissa ma basati su diversi numeri N_A, N_B, N_C, \dots di valori totali sull'asse delle ordinate.

A.4.2 Istogrammi normalizzati in area

In un *istogramma normalizzato in area* l'altezza di ogni colonna è proporzionale alla *densità campionaria*

$$f_j^* = \frac{n_j}{N \Delta X_j}. \quad (\text{A.4.4})$$

È facile verificare che, qualunque sia il numero N di misure, la somma delle aree di tutte le colonne è unitaria:

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} f_j^* \Delta X_j = 1. \quad (\text{A.4.5})$$

La normalizzazione in area è necessaria quando si vogliono confrontare istogrammi le cui colonnine hanno basi $\Delta x_A, \Delta x_B, \dots$ diverse.

È il caso, ad esempio, di misurazioni eseguite con risoluzioni diverse Δx_A e Δx_B .

Un'altra applicazione si ha quando si vuole confrontare un istogramma con una distribuzione di variabile aleatoria continua rappresentata da una densità di probabilità $f(x)$ (vedi ad esempio al §6.6).

Appendice B

Unità di misura

B.1 Sistema Internazionale (S.I.)

B.1.1 S.I.: Grandezze fondamentali

Il S.I. prevede 7 *grandezze fondamentali* (Tabella 2.1). A partire da Maggio 2019, la definizione delle loro unità è basata su sette *costanti di definizione*, i cui valori esatti sono elencati nella Tabella 2.2.

- **Tempo.** Il secondo (s) è definito assumendo che il valore numerico della frequenza del Cesio ν_{Cs} , ossia la frequenza della transizione iperfine dello stato fondamentale del Cesio, sia 9 162 631 770 se espresso in unità Hz, ossia s^{-1} .
- **Lunghezza.** Il metro (m) è definito assumendo che il valore della velocità della luce nel vuoto c sia 299 792 458 se espresso nell'unità ms^{-1} , dove il secondo è definito come sopra, ossia in relazione a ν_{Cs} .
- **Massa.** Il chilogrammo (kg) è definito assumendo che il valore della costante di Planck h sia $6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$ se espresso in unità $kg\,m^2\,s^{-1}$, dove metro e secondo sono definiti in relazione a c e ν_{Cs} .
- **Corrente elettrica.** L'ampere (A) è definito assumendo che il valore della carica elementare e sia $1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$ se espresso in unità C, ossia A s, dove il secondo è definito in relazione a ν_{Cs} .
- **Temperatura termodinamica.** Il kelvin (K) è definito assumendo che il valore della costante di Boltzmann k_B sia $1.380\,649 \times 10^{-23}$ se espresso in unità $kg\,m^2\,s^{-2}\,K^{-1}$.
- **Quantità di sostanza.** Una mole (mol) contiene esattamente $6.022\,140\,76 \times 10^{23}$ entità elementari (la cui natura deve essere specificata esplicitamente). Questo numero è il valore della costante di Avogadro N_A espresso in unità mol^{-1} .
- **Intensità luminosa.** La candela (cd) è definita assumendo che il valore numerico dell'efficienza luminosa della radiazione monocromatica di frequenza 540×10^{12} Hz, K_{cd} , sia 683 se misurato in unità $cd\,sr\,kg^{-1}\,m^{-2}\,s^{-3}$.

B.1.2 S.I.: grandezze derivate

Le unità di misura delle grandezze derivate si ottengono mediante semplici operazioni aritmetiche a partire dalle unità di misura delle grandezze fondamentali. Le unità di misura dotate di nome e simbolo propri sono riportate nella Tabella seguente.

<i>Grandezza</i>	<i>Unità</i>	<i>Simbolo</i>	<i>Conversione</i>	<i>Note</i>
Angolo piano	radiante	rad	$1 \text{ rad} = 1 \text{ m m}^{-1}$	(1)
Angolo solido	steradiane	sr	$1 \text{ sr} = 1 \text{ m}^2 \text{ m}^{-2}$	(1)
Frequenza	hertz	Hz	$1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$	
Forza	newton	N	$1 \text{ N} = 1 \text{ m kg s}^{-2}$	
Pressione, sforzo	pascal	Pa	$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N m}^{-2}$	(2)
Lavoro, energia, calore	joule	J	$1 \text{ J} = 1 \text{ N m}$	
Potenza	watt	W	$1 \text{ W} = 1 \text{ J s}^{-1}$	
Carica elettrica	coulomb	C	$1 \text{ C} = 1 \text{ A s}$	
Diff. di potenziale elettrico	volt	V	$1 \text{ V} = 1 \text{ W A}^{-1}$	
Capacità	farad	F	$1 \text{ F} = 1 \text{ C V}^{-1}$	
Resistenza elettrica	ohm	Ω	$1 \Omega = 1 \text{ V A}^{-1}$	
Conduttanza elettrica	siemens	S	$1 \text{ S} = 1 \Omega^{-1}$	
Flusso magnetico	weber	Wb	$1 \text{ Wb} = 1 \text{ V s}$	
Induzione magnetica	tesla	T	$1 \text{ T} = 1 \text{ Wb m}^{-2}$	
Induttanza elettrica	henry	H	$1 \text{ H} = 1 \text{ Wb A}^{-1}$	
Temperatura Celsius	grado Celsius	$^{\circ}\text{C}$	$T(^{\circ}\text{C}) = T(\text{K}) - 273.15$	
Flusso luminoso	lumen	lm	$1 \text{ lm} = 1 \text{ cd sr}$	(3)
Illuminamento	lux	lx	$1 \text{ lx} = 1 \text{ lm m}^{-2}$	(3)
Attività (di un radionuclide)	becquerel	Bq	$1 \text{ Bq} = 1 \text{ s}^{-1}$	(4)
Dose assorbita	gray	Gy	$1 \text{ Gy} = 1 \text{ J kg}^{-1}$	(4)
Dose equivalente	sievert	Sv	$1 \text{ Sv} = 1 \text{ J Kg}^{-1}$	(4)

Nota 1: Fino al 1995 l'angolo piano e l'angolo solido venivano classificati come *grandezze supplementari*, anziché come grandezze derivate.

Nota 2: Per molte applicazioni pratiche il *pascal* è un'unità molto piccola. In molti casi viene utilizzato il *bar*: $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ (vedi § B.1.d).

Nota 3: *Flusso luminoso* e *illuminamento* sono grandezze derivate usate in *fotometria*. Grandezza e unità fondamentali della fotometria sono rispettivamente l'*intensità luminosa* e la *candela* (vedi § 2.3 e § B.1.a). Il *flusso luminoso* è il flusso di energia irraggiata nell'unità di tempo, pesato dalla curva media di sensibilità dell'occhio. L'*illuminamento* è il flusso luminoso incidente sull'unità di superficie di un corpo illuminato.

Nota 4: *Attività*, *dose assorbita* e *dose equivalente* sono grandezze utilizzate in *dosimetria*. La dosimetria si occupa della misura dell'intensità e degli effetti delle radiazioni ionizzanti. L'*attività* è il numero di decadimenti radioattivi nell'unità di tempo. La *dose assorbita* è l'energia ceduta dalla radiazione ionizzante all'unità di massa di materia attraversata. La *dose equivalente* tiene conto anche dell'efficacia biologica, a parità di dose assorbita, dei differenti tipi di radiazione ionizzante.

B.1.3 Unità non S.I. ammesse all'uso

Nel 1996 il CIPM (Comitato Internazionale dei Pesi e Misure) ha elencato come *ammesse all'uso* alcune alcune unità di misura estranee al S.I., ma largamente utilizzate in campo scientifico, tecnico, commerciale e nella vita comune. L'uso di queste unità di misura, seppure ammesso, non è comunque incoraggiato.

Il CIPM ha classificato queste unità in 3 categorie.

Unità di uso frequente

<i>Grandezza</i>	<i>Unità</i>	<i>Simbolo</i>	<i>Conversione</i>
Volume	litro	l,L	$1 \text{ L} = 10^{-3} \text{ m}^3$
Massa	tonnellata	t	$1 \text{ t} = 10^3 \text{ kg}$
Tempo	minuto	min	$1 \text{ min} = 60 \text{ s}$
Tempo	ora	h	$1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$
Tempo	giorno	d	$1 \text{ d} = 86400 \text{ s}$
Angolo piano	grado	°	$1^\circ = (\pi/180) \text{ rad}$
Angolo piano	minuto	'	$1' = (\pi/10800) \text{ rad}$
Angolo piano	secondo	"	$1'' = (\pi/648000) \text{ rad}$
	neper	Np	$1 \text{ Np} = 1$
	bell	Bp	$1 \text{ B} = (1/2) \ln 10 \text{ (Np)}$

Unità il cui valore è ottenuto sperimentalmente

<i>Grandezza</i>	<i>Unità</i>	<i>Simbolo</i>	<i>Conversione</i>	<i>Note</i>
Lunghezza	unità astronomica	ua	$1 \text{ ua} = 1.49597870691(30) \times 10^{11} \text{ m}$	1
Massa	unità di massa atomica	u	$1 \text{ u} = 1.66053873(13) \times 10^{-27} \text{ kg}$	
Energia	elettronvolt	eV	$1 \text{ eV} = 1.602176462 \times 10^{-19} \text{ J}$	

Nota 1: L'unità astronomica, corrispondente all'incirca alla distanza Terra-Sole, è definita come la lunghezza del semi-asse maggiore dell'orbita intorno al Sole di un pianeta di massa trascurabile, non perturbato, il cui periodo di rivoluzione siderale fosse di 365.2568983263 giorni.

Unità di ammesse all'uso in settori specifici

<i>Grandezza</i>	<i>Unità</i>	<i>Simbolo</i>	<i>Conversione</i>
Lunghezza	ångström	Å	$1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$
Lunghezza	miglio marino		1852 m
Velocità	nodo		0.514 m/s
Superficie	ara	a	$1 \text{ a} = 10^2 \text{ m}^2$
Superficie	ettaro	ha	$1 \text{ ha} = 10^4 \text{ m}^2$
Superficie	barn	b	$1 \text{ b} = 10^{-28} \text{ m}^2$
Pressione	bar	bar	$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$

B.1.4 S.I.: prefissi moltiplicativi

Il S.I. codifica l'uso dei prefissi moltiplicativi secondo le potenze di 1000. Sono previsti anche i prefissi per multipli e sottomultipli per fattori 10 e 100.

<i>Fattore</i>	<i>Prefisso</i>	<i>Simbolo</i>	<i>Fattore</i>	<i>Prefisso</i>	<i>Simbolo</i>
10^{24}	yotta-	Y-	10^{-24}	yocto-	y-
10^{21}	zetta-	Z-	10^{-21}	zepto-	z-
10^{18}	exa-	E-	10^{-18}	atto-	a-
10^{15}	peta-	P-	10^{-15}	femto-	f-
10^{12}	tera-	T-	10^{-12}	pico-	p-
10^9	giga-	G-	10^{-9}	nano-	n-
10^6	mega-	M-	10^{-6}	micro-	μ -
10^3	chilo-	k-	10^{-3}	milli-	m-
10^2	etto-	h-	10^{-2}	centi-	c-
10	deca-	da-	10^{-1}	deci-	d-

I prefissi moltiplicativi precedono il nome dell'unità di misura, fondamentale o derivata. Ad esempio, $1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$; $1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$.

Come deroga alla regola generale, i multipli e sottomultipli dell'unità di massa (chilogrammo, kg) si formano aggiungendo i prefissi moltiplicativi alla parola *grammo* e i relativi simboli al simbolo *g*. Ad esempio, $1 \text{ mg} = 10^{-3} \text{ g} = 10^{-6} \text{ kg}$.

B.1.5 S.I.: regole di scrittura

- a) I nomi delle unità di misura vanno sempre scritti in carattere minuscolo, privi di accenti o altri segni grafici (es.: ampere, non Ampère).
- b) I nomi delle unità non hanno plurale (3 ampere, non 3 amperes).
- c) I simboli delle unità di misura vanno scritti con l'iniziale minuscola, tranne quelli derivanti da nomi propri (es.: mol per la mole, K per il kelvin).
- d) I simboli non devono essere seguiti dal punto (salvo che si trovino a fine periodo).
- e) I simboli devono sempre seguire i valori numerici (1 kg, non kg 1).
- f) Il prodotto di due o più unità va indicato con un punto a metà altezza o con un piccolo spazio tra i simboli (es.: N·m opp. N m).
- g) Il quoziente tra due unità va indicato con una barra obliqua o con esponenti negativi (es.: J/s opp. J s^{-1}).

B.2 Unità di misura non ammesse dal S.I.

Nelle tabelle seguenti sono elencate alcune unità di misura spesso usate nella pratica, anche se non più ammesse legalmente.

<i>Grandezza</i>	<i>Unità</i>	<i>Simbolo</i>	<i>Conversione</i>
Superfici agrarie	ara	a	10^2 m^2
Densità lineare (fibre tessili)	tex	tex	$= 10^{-6} \text{ kg/m}$
Vergenza ottica	diottria	m^{-1}	
Massa (pietre preziose)	carato metrico		$2 \times 10^{-4} \text{ kg}$
Volume	stero	st	1 m^3
Forza	kilogrammo-forza	kgf	9.80665 N
Pressione	torr	torr	133.322 Pa
	atmosfera	atm	101325 Pa
Pressione (del sangue)	millimetro di mercurio	mm Hg	133.322 Pa
Energia	caloria internaz.	cal	4.1855 J
	frigoria	fg	-4.1868 J
Potenza	cavallo vapore	CV	735.499 W
Luminanza	stilb	sb	10^4 nt
Viscosità cinematica	stokes	St	$10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
Viscosità dinamica	poise	P	10^{-1} Pa s
Attività	curie	Ci	$3.7 \times 10^{10} \text{ Bq}$
Dose assorbita	rad	rd	10^{-2} Gy
Dose equivalente	rem	rem	10^{-2} Sv
Esposizione	roentgen	R	$2.58 \times 10^{-4} \text{ C kg}^{-1}$

B.3 Sistemi anglosassoni

Nella tabella sono elencate alcune tra le più comuni unità di misura anglosassoni, il cui uso dovrebbe comunque essere progressivamente sostituito dal S.I. Alcune unità, pur avendo nome uguale, hanno valore diverso in Gran Bretagna (UK) e negli Stati Uniti d'America (US).

<i>Grandezza</i>	<i>Unità</i>	<i>Simbolo</i>	<i>Conversione</i>
Lunghezza	inch (<i>pollice</i>)	in	25.4 mm
	foot (<i>pie</i>)	ft	12 in = 304.8 mm
	yard (<i>iarda</i>)	yd	3 ft = 0.9144 m
	statute mile (<i>miglio</i>)	mi	1760 yd = 1609.344 m
	nautical mile (<i>miglio marino</i>)	naut mi	6080 ft = 1853.184 m
Volume	cubic inch (<i>pollice cubo</i>)	in ³	16.387 cm ³
	fluid ounce UK (<i>oncia fluida</i>)	fl oz (UK)	28.413 cm ³
	fluid ounce US (<i>oncia fluida</i>)	fl oz (US)	29.574 cm ³
	pint UK (<i>pinta</i>)	pt	568.261 cm ³
	liquid pint US (<i>pinta</i>)	liq pt	473.176 cm ³
	gallon UK (<i>gallone</i>)	gal UK	4.5461 dm ³
	gallon US (<i>gallone</i>)	gal US	3.7854 dm ³
	oil barrel (<i>barile</i>)		158.987 dm ³
Massa	ounce (<i>oncia</i>)	oz	28.349 g
	pound (<i>libbra</i>)	lb	0.4536 kg
Forza	pound-force	lbf	4.448 N
Pressione	pound-force/square-inch	psi	6894.76 Pa
Energia	pound-force foot	lbf ft	1.3557 J
	British thermal unit	Btu	1054.5 J
	therm	therm	105.506 MJ
Potenza	horse power	hp	745.7 W
Temperatura	grado Fahrenheit	°F	5/9 K

B.4 Sistema c.g.s. di Gauss

B.4.1 Confronto tra unità c.g.s. di Gauss e unità S.I.

<i>Grandezza</i>	<i>Unità</i>	<i>Simbolo</i>	<i>Conversione S.I.</i>
Forza	dina	dyn	1 dyn = 10^{-5} N
Lavoro, energia	erg	erg	1 erg = 10^{-7} J
Carica elettrica	statcoulomb	statC	1 statC = 3.3×10^{-10} C
Corrente elettrica	statampere	statA	1 statA = 3.3×10^{-10} A
Potenziale elettrico	statvolt	statV	1 statV = 300 V
Induzione magnetica B	gauss	G	1 G = 10^{-4} T
Campo magnetico H	oersted	Oe	1 Oe = $(1/4\pi) \times 10^3$ A m $^{-1}$

B.4.2 Formule dell'elettromagnetismo: sistema di Gauss e S.I.

	<i>c.g.s. Gauss</i>	<i>S.I.</i>
Legge di Coulomb	$F = q_1 q_2 / r^2$	$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 q_2 / r^2$
Interazione elettrodinamica	$F = 2 \frac{1}{c^2} I_1 I_2 \ell / d$	$F = 2 \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \ell / d$
Induzione elettromagnetica	$fem = -\frac{1}{c} d\Phi_B / dt$	$fem = -d\Phi_B / dt$
Equazioni di Maxwell	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$
	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \partial \vec{B} / \partial t$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$
	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
	$c \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi \vec{J}$	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J} / \epsilon_0$
Forza di Lorentz	$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right)$	$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$

$$c \simeq 3 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1} = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ m Kg C}^{-2}$$

$$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$$

B.5 Unità non S.I. di uso corrente in Fisica

Nella tabella seguente sono elencate per comodità alcune unità non S.I. utilizzate frequentemente in Fisica e Astronomia.

<i>Unità</i>	<i>Simbolo</i>	<i>Grandezza</i>	<i>Conversione</i>	<i>Note</i>
angström	Å	lunghezza (fisica atom.)	10^{-10} m	
anno luce	a.l.	lunghezza (astronomia)	9.46×10^{15} m	(1)
barn	b	sezione d'urto	10^{-28} m ²	
centimetri inversi	cm ⁻¹	numero d'onda	100 m ⁻¹	(2)
fermi	fm	lunghezza (fisica nucl.)	10^{-15} m	
hartree	Hartree	energia	27.2 eV	(3)
			4.36×10^{-18} J	
millimetri di mercurio	mmHg	pressione	133.322 Pa	(4)
parsec	pc	lunghezza (astronomia)	3.08×10^{16} m	(1)
röntgen	R	esposizione	2.58×10^{-4} C kg ⁻¹	
rydberg	Ry	energia	13.6 eV	(3)
			2.18×10^{-18} J	
unità astronomica	UA	lunghezza (astronomia)	1.496×10^{11} m	(1)
unità di massa at.	amu	massa	1.66×10^{-27} Kg	(4)

Nota 1: In Astronomia si utilizzano peculiari unità di misura delle lunghezze:

l'*anno luce* è la distanza percorsa nel vuoto dalla radiazione elettromagnetica in un anno tropico (cioè nell'intervallo di tempo tra due passaggi consecutivi, nella stessa direzione, del Sole attraverso il piano equatoriale terrestre);

l'*Unità Astronomica* corrisponde al valore arrotondato della distanza media Terra-Sole;

il *parsec*, contrazione di *parallasse secondo*, è la distanza alla quale la distanza di 1 Unità Astronomica sottende un angolo di 1'' (1'' = 4.84814×10^{-6} rad).

Nota 2: Il *numero d'onda* è l'inverso della lunghezza d'onda λ . Il numero d'onda è legato alla frequenza ν dalla relazione $\nu = v(1/\lambda)$, dove v è la velocità di propagazione dell'onda. Per le onde elettromagnetiche nel vuoto $v = c$, per cui $\nu = c(1/\lambda)$.

Nota 3: L'*hartree* e il *rydberg* sono unità di misura *naturali* dell'energia, definite con riferimento allo stato fondamentale dell'atomo di idrogeno.

1 Hartree corrisponde al valore assoluto dell'energia potenziale dell'elettrone nello stato fondamentale, cioè, in unità S.I.,

$$U_0 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{a_0}$$

dove a_0 è il raggio della prima orbita del modello di Bohr (vedi §2.4).

1 Ry = 0.5 Hartree corrisponde all'energia di ionizzazione dell'atomo di idrogeno.

Nota 4: L'*unità di massa atomica* corrisponde ad 1/12 della massa di un atomo di carbonio 12 (vedi §2.4).

Appendice C

Dimostrazioni e complementi

C.1 Risposta dinamica degli strumenti: equazioni differenziali

Il comportamento dinamico di molti strumenti (§3.5) può essere descritto da equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del 1° ordine (eq. 3.5.2)

$$a_1 \frac{dZ}{dt} + a_0 Z = b_0 X. \quad (C.1.1)$$

oppure del 2° ordine (eq. 3.5.3)

$$a_2 \frac{d^2 Z}{dt^2} + a_1 \frac{dZ}{dt} + a_0 Z = b_0 X. \quad (C.1.2)$$

La soluzione $Z(t)$ di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti è la somma di due funzioni:

$$Z(t) = Z_{\text{tr}}(t) + Z_{\text{st}}(t), \quad (C.1.3)$$

dove

$Z_{\text{tr}}(t)$ è la soluzione generale dell'equazione omogenea associata;

$Z_{\text{st}}(t)$ è una soluzione particolare dell'equazione non omogenea.

C.1.1 Soluzione dell'equazione omogenea del 1° ordine

L'equazione omogenea del 1° ordine

$$\frac{dZ}{dt} + \gamma Z = 0; \quad (\gamma = a_0/a_1) \quad (C.1.3)$$

può essere risolta per separazione di variabili: $(dZ/Z) = -\gamma dt$ e successiva integrazione tra l'istante $t = 0$ in cui $Z(t) = Z_0$ e il generico istante t :

$$\int_{Z_0}^Z \frac{dZ'}{Z'} = \int_{t'}^t dt' \quad (C.1.4)$$

da cui è facile ricavare la soluzione (transitoria) dell'equazione omogenea del 1° ordine a meno della costante Z_0 , che dipende dalle condizioni iniziali:

$$Z_{\text{tr}}(t) = Z_0 \exp(-\gamma t). \quad (C.1.5)$$

C.1.2 Soluzione dell'equazione omogenea del 2° ordine

L'equazione omogenea del 2° ordine è

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + 2\gamma \frac{dZ}{dt} + \omega_0^2 = 0; \quad (2\gamma = a_1/a_2; \quad \omega_0^2 = a_0/a_2). \quad (C.1.6)$$

Per la sua soluzione ci si aspetta un andamento misto sinusoidale (indotto dal termine di 2° ordine) ed esponenziale (indotto dal termine di 1° ordine). Cerchiamo pertanto una soluzione complessa del tipo

$$Z_{\text{tr}}(t) = \exp(\lambda t); \quad \lambda = a + ib, \quad (C.1.7)$$

in cui

$\exp(a)$ dà l'andamento esponenziale;

$\exp(ib)$ dà l'andamento sinusoidale.

Sostituendo la funzione $Z(t)$ dell'eq. (C.1.7) nell'eq. (C.1.6) e semplificando si ottiene l'*equazione caratteristica*

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (C.1.8)$$

cioè un'equazione algebrica di secondo grado in λ che ammette due soluzioni complesse:

$$\lambda_+ = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}; \quad \lambda_- = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (C.1.9)$$

Si distinguono tre casi, a seconda che $\gamma < \omega_0$, $\gamma = \omega_0$, $\gamma > \omega_0$.

1) **1° caso:** $\gamma < \omega_0$

Il radicando delle eq. (C.1.9) è negativo. Introducendo il nuovo parametro

$$\omega_s = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (C.1.10)$$

due soluzioni complesse linearmente indipendenti dell'eq. (C.1.6) possono essere espresse come

$$Z_+(t) = e^{-\gamma t} e^{i\omega_s t}; \quad Z_-(t) = e^{-\gamma t} e^{-i\omega_s t}. \quad (C.1.11)$$

Combinando linearmente le (C.1.7) e sfruttando le relazioni di Eulero si possono ottenere due soluzioni reali linearmente indipendenti dell'eq. (C.1.6):

$$z_1(t) = e^{-\gamma t} \cos \omega_s t; \quad z_2(t) = e^{-\gamma t} \sin \omega_s t. \quad (C.1.12)$$

La soluzione generale dell'eq. (C.1.6) in campo reale per $\gamma < \omega_0$ è

$$Z_{\text{tr}}(t) = a_1 z_1(t) + a_2 z_2(t) = Z_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega_s t + \phi) \quad (C.1.13)$$

I parametri Z_0 e ϕ dipendono dalle condizioni iniziali.

2) **2° caso:** $\gamma = \omega_0$ (smorzamento critico)

Il radicando delle eq. (C.1.9) è nullo; si hanno perciò due soluzioni reali coincidenti per l'eq. (C.1.8): $\lambda = -\gamma$.

Due soluzioni reali linearmente indipendenti dell'eq. (C.1.6) sono

$$z_1(t) = e^{-\gamma t}; \quad z_2(t) = t e^{-\gamma t}. \quad (C.1.14)$$

La soluzione generale dell'eq. (C.1.6) è

$$Z_{\text{tr}}(t) = Z_1 z_1(t) + Z_2 z_2(t) = (Z_1 + Z_2 t) e^{-\gamma t}. \quad (C.1.15)$$

I parametri Z_1 e Z_2 dipendono dalle condizioni iniziali.

3) **3° caso:** $\gamma > \omega_0$

Il radicando delle eq. (C.1.9) è positivo. Poniamo $\delta = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ (per cui $\delta < \gamma$). Due soluzioni reali linearmente indipendenti dell'eq. (C.1.6) sono

$$z_1(t) = e^{-(\gamma-\delta)t}; \quad z_2(t) = e^{-(\gamma+\delta)t}. \quad (C.1.16)$$

La soluzione generale dell'eq. (C.1.6) è

$$Z_{\text{tr}}(t) = Z_1 z_1(t) + Z_2 z_2(t) = Z_1 e^{-(\gamma-\delta)t} + Z_2 e^{-(\gamma+\delta)t}. \quad (C.1.17)$$

I parametri Z_1 e Z_2 dipendono dalle condizioni iniziali.

C.1.3 Ingresso a gradino per uno strumento del 1° ordine

Cerchiamo la soluzione dell'equazione non omogenea del 1° ordine, eq. (C.1.1), nel caso di un ingresso a gradino:

$$X(t) = \begin{cases} X_0 & \text{per } t < 0 \\ X_1 & \text{per } t > 0 \end{cases} \quad (C.1.18)$$

e supponiamo che per $t < 0$ lo strumento abbia avuto il tempo di stabilizzarsi alla risposta stazionaria $Z = (b_0/a_0) X_0$.

Studiamo cosa succede per $t > 0$. Se lasciamo passare un tempo sufficientemente lungo, al limite per $t \rightarrow \infty$, la soluzione transitoria $Z_{\text{tr}}(t)$ dell'equazione omogenea si spegne e possiamo determinare la soluzione stazionaria

$$Z_{\text{st}} = \frac{b_0}{a_0} X_1 \quad (C.1.19)$$

La soluzione generale dell'eq. (C.1.1) per $t \geq 0$ è

$$Z(t) = Z_{\text{tr}}(t) + Z_{\text{st}}(t) = Z_0 e^{-t/\tau} + (b_0/a_0) X_1. \quad (C.1.20)$$

Per determinare la costante Z_0 consideriamo l'istante $t = 0$ e imponiamo all'eq. (C.1.20) la condizione iniziale $Z(0) = (b_0/a_0) X_0$:

$$Z(0) = (b_0/a_0) X_0 = Z_0 + (b_0/a_0) X_1 \quad (C.1.21)$$

da cui si ricava $Z_0 = (b_0/a_0) (X_0 - X_1)$. In definitiva

$$Z(t) = \frac{b_0}{a_0} (X_0 - X_1) e^{-t/\tau} + \frac{b_0}{a_0} X_1. \quad (C.1.22)$$

C.1.4 Ingresso a gradino per uno strumento del 2° ordine

Cerchiamo ora la soluzione dell'equazione non omogenea del 2° ordine, eq. (C.1.2), sempre nel caso dell'ingresso a gradino dato dall'eq. (C.1.18).

Anche per lo strumento di 2° ordine l'andamento asintotico Z_{st} sarà dato dall'eq. (C.1.19). È necessario però determinare il valore delle due costanti della soluzione transitoria dell'equazione omogenea.

Si hanno tre tipi di comportamento, a seconda che $\gamma < \omega_0$, $\gamma = \omega_0$ oppure $\gamma > \omega_0$.

1. **1° caso:** $\gamma < \omega_0$

La soluzione dell'eq. (C.1.2) per l'ingresso a gradino è

$$Z(t) = Z_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega_s t + \phi) + \frac{b_0}{a_0} X_1. \quad (C.1.23)$$

Imponendo che all'istante $t = 0$ la funzione $Z = (b_0/a_0) X_0$ e la sua derivata prima $dZ/dt = 0$ si ottengono i valori di Z_0 e ϕ :

$$Z_0 = \frac{b_0}{a_0} \sqrt{(\gamma/\omega_s)^2 + 1} (X_0 - X_1); \quad \phi = \arctg(-\gamma/\omega_s). \quad (C.1.24)$$

2. **2^o caso:** $\gamma = \omega_0$ (smorzamento critico)

La soluzione dell'eq. (C.1.2) per l'ingresso a gradino è

$$Z(t) = (Z_1 + Z_2 t) e^{-\gamma t} + \frac{b_0}{a_0} X_1. \quad (C.1.25)$$

Imponendo che all'istante $t = 0$ la funzione $Z = (b_0/a_0)X_0$ e la sua derivata prima $dZ/dt = 0$ si ricavano i valori di Z_1 e Z_2 , per cui infine

$$Z(t) = \frac{b_0}{a_0} (X_0 - X_1) [1 - \gamma t] e^{-\gamma t} + \frac{b_0}{a_0} X_1. \quad (C.1.26)$$

3. **3^o caso:** $\gamma > \omega_0$

La soluzione dell'eq. (C.1.2) per l'ingresso a gradino è

$$Z(t) = Z_1 e^{-(\gamma-\delta)t} + Z_2 e^{-(\gamma+\delta)t} + \frac{b_0}{a_0} X_1. \quad (C.1.27)$$

Imponendo che all'istante $t = 0$ la funzione $Z = (b_0/a_0)X_0$ e la sua derivata prima $dZ/dt = 0$ si ricavano i valori di Z_1 e Z_2 :

$$Z_1 = \left[1 - \frac{\gamma - \delta}{\gamma + \delta}\right]^{-1} \left(\frac{b_0}{a_0}\right) (X_0 - X_1); \quad Z_2 = -\frac{\gamma - \delta}{\gamma + \delta} Z_1. \quad (C.1.28)$$

C.2 Funzioni trasformate delle distribuzioni

Il calcolo dei momenti delle distribuzioni di variabile aleatoria (v.a.) e più in generale lo studio e il confronto di molte loro proprietà possono venire facilitati introducendo ed utilizzando due nuove funzioni: la *funzione generatrice dei momenti* e la *funzione caratteristica*.

C.2.1 Funzione generatrice dei momenti

La funzione generatrice dei momenti $\mathcal{G}(t)$ è una funzione della variabile reale t così definita:

a) per una v.a. discreta K :

$$\mathcal{G}_k(t) = \langle e^{tk} \rangle = \sum_j e^{tk_j} p_j; \quad (C.2.1)$$

b) per una v.a. continua X :

$$\mathcal{G}_x(t) = \langle e^{tx} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x) dx. \quad (C.2.2)$$

La funzione generatrice dei momenti è il valor medio di un esponenziale. Se sviluppiamo in serie di MacLaurin l'esponenziale e^{tx} dell'eq. (C.2.2) e ricordiamo che la media di una somma è uguale alla somma delle medie, otteniamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_x(t) &= \left\langle 1 + tx + \frac{t^2 x^2}{2!} + \frac{t^3 x^3}{3!} + \dots \right\rangle \\ &= 1 + t \langle x \rangle + \frac{t^2 \langle x^2 \rangle}{2!} + \frac{t^3 \langle x^3 \rangle}{3!} + \dots = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s \alpha_s}{s!} \end{aligned} \quad (C.2.3)$$

dove α_s indica il momento iniziale di ordine s della v.a. X .
In modo analogo, anche per una v.a. discreta K

$$\mathcal{G}_k(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s \alpha_s}{s!}. \quad (C.2.4)$$

Deriviamo ora la funzione generatrice rispetto alla variabile t distinguendo i due casi di v.a. discreta e continua:

$$\frac{d^s \mathcal{G}_k(t)}{dt^s} = \frac{d^s \langle e^{tk} \rangle}{dt^s} = \langle k^s e^{tk} \rangle; \quad \frac{d^s \mathcal{G}_x(t)}{dt^s} = \frac{d^s \langle e^{tx} \rangle}{dt^s} = \langle x^s e^{tx} \rangle. \quad (C.2.5)$$

È immediato ora verificare che la derivata s -ma della funzione generatrice calcolata in $t = 0$ non è altro che il momento iniziale s -mo della distribuzione della v.a.:

$$\left. \frac{d^s \mathcal{G}_k(t)}{dt^s} \right|_{t=0} = \langle k^s \rangle = \alpha_s; \quad \left. \frac{d^s \mathcal{G}_x(t)}{dt^s} \right|_{t=0} = \langle x^s \rangle = \alpha_s. \quad (C.2.6)$$

Le eq. (C.2.6) mostrano che è possibile, nota la funzione generatrice, ricavare i momenti α_s . Nei paragrafi successivi vedremo alcuni esempi di calcolo dei momenti basati sull'uso della funzione generatrice.

Un importante teorema (detto *teorema di unicità*) assicura che, date due v.a. X e Y , l'uguaglianza delle funzioni generatrici $\mathcal{G}_x(t) = \mathcal{G}_y(t)$ è condizione necessaria e sufficiente affinché siano uguali anche le rispettive funzioni di distribuzione $f_x(x) = f_y(y)$.

È bene tener presente che la funzione generatrice non necessariamente esiste per qualsiasi distribuzione di v.a. Ad esempio, la distribuzione di Cauchy (detta anche di Lorentz) introdotta al §6.7 (e che verrà ripresa in considerazione al §C.8) non ammette funzione generatrice dei momenti.

C.2.2 Funzione caratteristica

Sostituendo la variabile reale t nelle eq. (C.2.1) e (C.2.2) con la variabile immaginaria $i\omega$ (dove come di consueto $i^2 = -1$) si ottiene la *funzione caratteristica* $\Psi(\omega)$; limitandoci alle v.a. continue:

$$\Psi(\omega) = \langle e^{i\omega x} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} f(x) dx. \quad (C.2.7)$$

Se sviluppiamo in serie di MacLaurin l'esponenziale $e^{i\omega x}$ dell'eq. (C.2.7) otteniamo:

$$\begin{aligned} \Psi(\omega) &= \left\langle 1 + i\omega x + \frac{(i\omega x)^2}{2!} + \frac{(i\omega x)^3}{3!} + \dots \right\rangle \\ &= 1 + i\omega \langle x \rangle + \frac{(i\omega)^2 \langle x^2 \rangle}{2!} + \frac{(i\omega)^3 \langle x^3 \rangle}{3!} + \dots = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(i\omega)^s \alpha_s}{s!} \end{aligned} \quad (C.2.8)$$

dove α_s indica il momento iniziale di ordine s della v.a. X .

Ripetendo la procedura seguita sopra per la funzione generatrice dei momenti e ricordando le proprietà dell'unità immaginaria i si trova la relazione analoga alle eq. (C.2.6):

$$\alpha_s = \langle x^s \rangle = (-1)^s i^s \left. \frac{d^s \Psi(\omega)}{d\omega^s} \right|_{\omega=0} \quad (C.2.9)$$

Anche per le funzioni caratteristiche vale il *teorema di unicità*: date due v.a. X e Y , l'uguaglianza delle funzioni caratteristiche $\Psi_x(\omega) = \Psi_y(\omega)$ è condizione necessaria e sufficiente affinché siano uguali anche le rispettive funzioni di distribuzione $f_x(x) = f_y(y)$.

Le funzioni caratteristiche operano nel campo dei numeri complessi. Questa complicazione è compensata dal fatto che qualsiasi distribuzione di v.a. ha una funzione caratteristica. La funzione caratteristica è quindi dotata di maggior generalità della funzione generatrice dei momenti.

La relazione funzionale che collega le due variabili coniugate X e ω nell'eq. (C.2.7) che definisce la funzione caratteristica trova molteplici applicazioni in Fisica, ed è universalmente nota come *trasformata di Fourier*.

C.2.3 Relazioni tra momenti iniziali e centrati

La conoscenza della funzione generatrice o della funzione caratteristica consente di ricavare i momenti iniziali α_s mediante le eq. (C.2.6) e (C.2.9). Una volta ottenuti i momenti iniziali α_s , i momenti centrati μ_s possono essere calcolati per mezzo delle relazioni:

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \alpha_2 - \alpha_1^2 \\ \mu_3 &= \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3 \\ \mu_4 &= \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4\end{aligned}\tag{C.2.10}$$

C.3 Momenti della distribuzione binomiale

Vogliamo calcolare i primi momenti della distribuzione binomiale introdotta al §6.1. La distribuzione binomiale dà la probabilità che, su n prove ripetute con singola probabilità p , k abbiano esito favorevole:

$$\mathcal{P}_{n,p}(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! k!} p^k q^{n-k}.\tag{C.3.1}$$

C.3.1 Calcolo diretto di media e varianza

Dimostriamo che il **valore medio** è $m = np$.

$$\begin{aligned}m &= \sum_{k=0}^n k \frac{n!}{(n-k)! k!} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-k)! (k-1)!} p^{k-1} q^{n-k} \\ &= np \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-s)! s!} p^s q^{n-1-s} = np\end{aligned}\tag{C.3.2}$$

Nell'ultima riga si è fatta la sostituzione $k-1 = s$: la sommatoria risultante è uguale ad uno, in quanto rappresenta la condizione di normalizzazione per la distribuzione binomiale $\mathcal{P}_{n-1,p}(s)$.

Calcoliamo ora la **varianza** della distribuzione binomiale, utilizzando l'espressione

$$D = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2,\tag{C.3.3}$$

corrispondente alla prima delle eq. (C.2.10) che collegano i momenti centrati μ_s ai momenti iniziali α_s .

Già sappiamo che $\langle k \rangle^2 = m^2 = (np)^2$. Determiniamo quindi

$$\begin{aligned}\langle k^2 \rangle &= \sum_{k=0}^n k^2 \frac{n!}{(n-k)! k!} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^n k \frac{(n-1)!}{(n-k)! (k-1)!} p^{k-1} q^{n-k} \\ &= np \sum_{s=0}^{n-1} (s+1) \frac{(n-1)!}{(n-1-s)! s!} p^s q^{n-1-s} = np[(n-1)p + 1] \\ &= (np)^2 - np^2 + np\end{aligned}\tag{C.3.4}$$

L'ultima sommatoria rappresenta il valor medio di $s+1$ per la distribuzione binomiale $\mathcal{P}_{n-1,p}(s)$: $\langle s+1 \rangle = \langle s \rangle + 1 = (n-1)p + 1$. È facile ora vedere che

$$D = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 = npq.\tag{C.3.5}$$

C.3.2 Calcolo dei momenti dalla funzione generatrice

I momenti di tutti gli ordini possono essere calcolati utilizzando la **funzione generatrice** introdotta al §C.2. La funzione generatrice dei momenti della distribuzione binomiale è (Fig. C.1, a destra)

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(t) &= \langle e^{tk} \rangle = \sum_{k=0}^n e^{tk} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pe^t)^k q^{n-k} = (pe^t + q)^n\end{aligned}\tag{C.3.6}$$

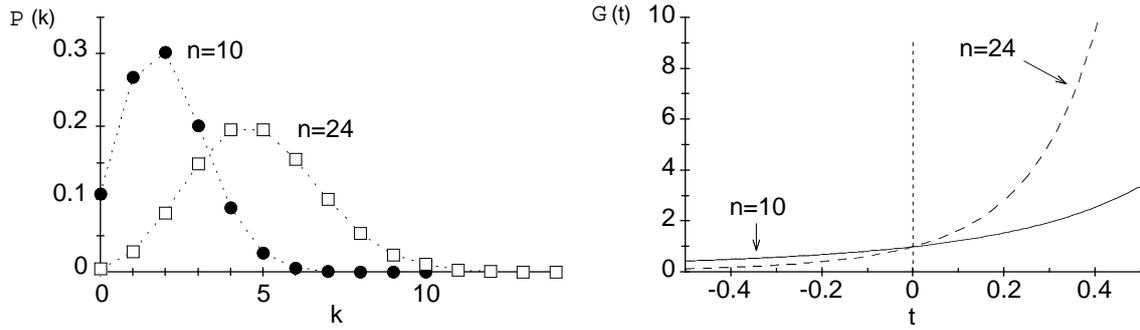


Figura C.1: A sinistra due distribuzioni binomiali con $p=0.2$ e differenti valori di n . A destra le corrispondenti funzioni generatrici dei momenti in un intorno di $t=0$. Secondo le eq. (C.2.6) il momento iniziale s -mo corrisponde alla derivata di ordine s della funzione generatrice calcolata in $t=0$.

Utilizzando le eq. (C.2.6) possiamo calcolare i primi 4 momenti iniziali della distribuzione binomiale:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= np \\ \alpha_2 &= n(n-1)p^2 + np \\ \alpha_3 &= n(n-1)(n-2)p^3 + 3n(n-1)p^2 + np \\ \alpha_4 &= n(n-1)(n-2)(n-3)p^4 + 6n(n-1)(n-2)p^3 + 7n(n-1)p^2 + np\end{aligned}$$

e quindi, utilizzando le eq. (C.2.10), i primi 4 momenti centrati:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= 0 \\ \mu_2 &= npq \\ \mu_3 &= npq(q-p) \\ \mu_4 &= npq[1 + 3npq - 6pq]\end{aligned}$$

C.3.3 Calcolo dei momenti dalla funzione caratteristica

Agli stessi risultati si perviene introducendo la **funzione caratteristica** della distribuzione binomiale

$$\Psi(\omega) = \langle e^{i\omega k} \rangle = \sum_{k=0}^n e^{i\omega k} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = (pe^{i\omega} + q)^n \quad (C.3.7)$$

e utilizzando l'eq. (C.2.9) per il calcolo dei momenti iniziali.

C.4 Momenti della distribuzione a densità uniforme

Consideriamo la distribuzione a densità uniforme

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < x_1 \\ C & \text{per } x_1 \leq x < x_2 \\ 0 & \text{per } x_2 \leq x \end{cases} \quad \left[C = \frac{1}{x_2 - x_1} \right] \quad (C.4.1)$$

Il *valor medio* è dato da

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} x dx = \frac{x_1 + x_2}{2}. \quad (C.4.2)$$

La *varianza* ed i momenti centrati di ordine superiore μ_3, μ_4, \dots dipendono dalla larghezza e dalla forma della distribuzione, non dalla sua posizione. Per semplificarne il calcolo conviene perciò

traslare la distribuzione in modo che il suo valor medio sia nullo, $m = 0$. Allora la distribuzione è simmetrica rispetto a $x = 0$, cosicché $x_1 = -\gamma, x_2 = +\gamma$, dove γ è la semilarghezza della distribuzione.

Applicando la definizione dei momenti iniziali alla distribuzione traslata

$$\alpha_s = \int_{-\infty}^{+\infty} x^s f(x) dx = \& \frac{1}{2\gamma} \int_{-\gamma}^{+\gamma} x^s dx \quad (C.4.3)$$

si ottiene:

$$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = \gamma^2/3 \quad \alpha_3 = 0 \quad \alpha_4 = \gamma^4/5.$$

Usando l'eq. (c.2.10) si calcolano i momenti centrati della distribuzione traslata:

$$\mu_1 = 0 \quad \mu_2 = \gamma^2/3 \quad ; \quad \mu_3 = 0 \quad \mu_4 = \gamma^4/5.$$

Si può ora risalire ai momenti centrati della generica distribuzione (C.4.1) espressi in funzione della larghezza $\Delta x = x_2 - x_1$ ricordando che $\Delta x = 2\gamma$:

$$\mu_1 = 0 \quad \mu_2 = (\Delta x)^2/12 \quad \mu_3 = 0 \quad \mu_4 = (\Delta x)^4/80.$$

C.5 Momenti della distribuzione di Poisson

Vogliamo calcolare i momenti della distribuzione di Poisson introdotta al §6.4:

$$\mathcal{P}_a(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}. \quad (C.5.1)$$

C.5.1 Calcolo diretto di media e varianza

Il *valor medio* è dato da

$$\begin{aligned} m = \langle k \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{a^k}{k!} e^{-a} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{a^k}{k!} e^{-a} \\ &= a e^{-a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} = a e^{-a} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{a^s}{s!} = a. \end{aligned} \quad (C.5.2)$$

Nell'ultimo passaggio si è fatta la sostituzione $s = k - 1$ e si è tenuto conto che

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{a^s}{s!} = e^a.$$

Per trovare la *varianza*, calcoliamo prima

$$\begin{aligned} \langle k^2 \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{a^k}{k!} e^{-a} = a \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} e^{-a} \\ &= a \left[\sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} e^{-a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} e^{-a} \right] = a [a + 1]. \end{aligned} \quad (C.5.3)$$

Nel penultimo passaggio si è sostituito $k = (k-1) + 1$.

Possiamo ora calcolare la varianza

$$D = \langle k^2 \rangle - \langle k \rangle^2 = a^2 + a - a^2 = a. \quad (C.5.4)$$

C.5.2 Funzione generatrice dei momenti

I momenti di tutti gli ordini possono essere calcolati utilizzando la **funzione generatrice** introdotta al §C.2. La funzione generatrice dei momenti della distribuzione di Poisson è

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(t) &= \langle e^{tk} \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} \frac{a^k}{k!} e^{-a} \\ &= e^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ae^t)^k}{k!} = e^{-a} e^{ae^t} = e^{a(e^t-1)} \end{aligned} \quad (C.5.5)$$

Utilizzando le eq. (C.2.6) e (C.2.10) possiamo calcolare i primi 4 momenti iniziali e centrati della distribuzione di Poisson:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= a & \mu_1 &= 0 \\ \alpha_2 &= a^2 + a & \mu_2 &= a \\ \alpha_3 &= a^3 + 3a + a & \mu_3 &= a \\ \alpha_4 &= a^4 + 6a^3 + 7a^2 + a & \mu_4 &= 3a^2 + a\end{aligned}$$

C.5.3 Funzione caratteristica

Agli stessi risultati si perviene introducendo la funzione caratteristica della distribuzione di Poisson:

$$\Phi(\omega) = \langle e^{i\omega k} \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} e^{i\omega k} \frac{a^k}{k!} e^{-a} = e^{a(e^{i\omega} - 1)} \quad (C.5.6)$$

e utilizzando l'eq. (C.2.9) per il calcolo dei momenti iniziali.

C.6 Integrale di Eulero-Poisson

Vogliamo dimostrare che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (C.6.1)$$

Allo scopo, scomponiamo la dimostrazione in tre passi.

1.

Consideriamo la funzione $\exp(-x^2 - y^2)$, definita in un dominio C del piano xy costituito dal cerchio di raggio $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ centrato nell'origine (Fig. C.2, a sinistra). Usando le coordinate polari r, θ è facile calcolare l'integrale

$$I_c = \iint_c e^{-x^2 - y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R e^{-r^2} r dr = \pi [1 - e^{-R^2}]. \quad (C.6.2)$$

Se $R \rightarrow \infty$, il dominio C si estende a tutto il piano e $I_c \rightarrow \pi$.

2.

Consideriamo ora, per la funzione $\exp(-x^2 - y^2)$, un dominio Q costituito dal quadrato di lato $2a$ centrato nell'origine: $-a \leq x \leq +a$, $-a \leq y \leq +a$ (Fig. C.2, al centro). Studiamo l'integrale

$$I_Q = \int_{-a}^{+a} dx \int_{-a}^{+a} dy e^{-x^2 - y^2}. \quad (C.6.3)$$

Consideriamo infine i cerchi C_1 e C_2 di raggi R_1 e R_2 , rispettivamente inscritto e circoscritto al quadrato (Fig. C.2, a destra); è facile rendersi conto che tra gli integrali sui tre domini C_1, Q, C_2 vale la relazione

$$I_{C_1} < I_Q < I_{C_2}. \quad (C.6.4)$$

Estendiamo ora il quadrato Q fino a comprendere tutto il piano ($a \rightarrow \infty$). Contemporaneamente avremo anche $R_1 \rightarrow \infty$, $R_2 \rightarrow \infty$, e quindi $I_{C_1} \rightarrow \pi$, $I_{C_2} \rightarrow \pi$. Pertanto, per $a \rightarrow \infty$, anche $I_Q \rightarrow \pi$.

3.

È facile convincersi che

$$\left[\int_{-a}^{+a} e^{-x^2} dx \right]^2 = \int_{-a}^{+a} dx \int_{-a}^{+a} dy e^{-x^2 - y^2}. \quad (C.6.5)$$

Pertanto

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right]^2 = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\int_{-a}^{+a} e^{-x^2} dx \right]^2 = \pi, \quad (C.6.6)$$

da cui si ricava l'eq. (C.6.1).

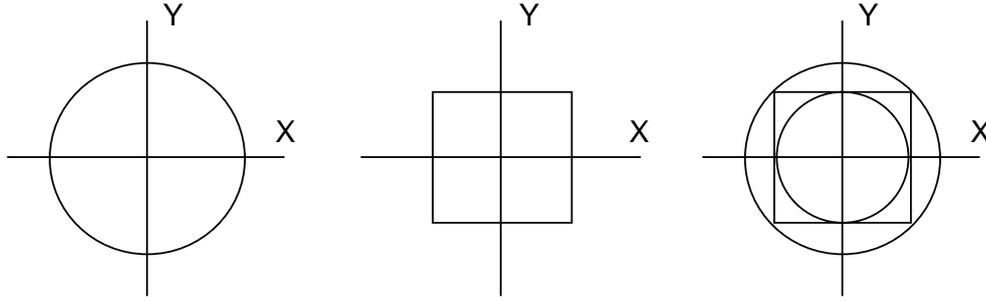


Figura C.2: Rappresentazione grafica dei domini di integrazione utilizzati nel calcolo dell'integrale di Eulero-Poisson.

C.7 Momenti della distribuzione normale

Vogliamo calcolare i momenti della distribuzione normale di Gauss introdotta al §6.5:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (C.7.1)$$

dove x è la variabile aleatoria, m e σ due parametri.

C.7.1 Calcolo diretto dei momenti

I momenti della distribuzione normale possono venire calcolati ricorrendo alla sostituzione di variabile

$$t = \frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}}$$

per cui

$$x = \sigma\sqrt{2}t + m, \quad dx = \sigma\sqrt{2} dt$$

e ricordando il valore dell'integrale di Eulero-Poisson (C.6.1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

Calcoliamo per primo il **valor medio**:

$$\begin{aligned} m = \langle x \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma\sqrt{2}t + m) e^{-t^2} dt \\ &= \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt + \frac{m}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = m. \end{aligned} \quad (C.7.2)$$

Nell'ultimo passaggio, il primo integrale è nullo (la funzione integranda è dispari!), il secondo è l'integrale di Eulero-Poisson.

Dimostriamo ora che per i **momenti centrati** vale la formula di ricorrenza

$$\mu_s = (s-1) \sigma^2 \mu_{s-2} \quad (C.7.3)$$

che consente di ricavare il valore del momento μ_s una volta noto il valore del momento μ_{s-2} .

Per definizione il momento centrato di ordine s è

$$\mu_s = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^s f(x) dx = \frac{(\sigma\sqrt{2})^s}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^s e^{-t^2} dt \quad (C.7.4)$$

L'integrale nell'eq. (C.7.4) può essere integrato per parti

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^s e^{-t^2} dt = \underbrace{-\frac{1}{2} e^{-t^2} t^{s-1}}_{=0} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{s-1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{s-2} e^{-t^2} dt \quad (C.7.5)$$

per cui infine

$$\mu_s = \frac{(s-1)(\sigma\sqrt{2})^s}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{s-2} e^{-t^2} dt. \quad (C.7.6)$$

Facendo riferimento alla definizione, eq. (C.7.4), è facile vedere che il momento centrato di ordine $s-2$ vale

$$\mu_{s-2} = \frac{(\sigma\sqrt{2})^{s-2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{s-2} e^{-t^2} dt \quad (C.7.7)$$

Il confronto tra le eq. (C.7.6) e (C.7.7) dimostra la formula di ricorrenza (C.7.3). Partendo dai momenti di ordine più basso:

$$\mu_0 = 1 \text{ (integrale di normalizzazione)}, \quad \mu_1 = 0 \text{ (valor medio dello scarto)},$$

ed applicando la formula di ricorrenza, si possono calcolare tutti i momenti centrati.

I momenti centrati di ordine dispari sono tutti nulli:

$$\mu_3 = \mu_5 = \mu_7 = \dots = 0, .$$

I primi momenti centrati di ordine pari valgono:

$$\mu_2 = \sigma^2; \quad \mu_4 = 3\sigma^4; \quad \mu_6 = 15\sigma^6; \quad \dots$$

C.7.2 Funzione generatrice dei momenti

Applicando la definizione data dall'eq. (C.2.2) si può vedere che la **funzione generatrice dei momenti** della distribuzione normale (C.6.1) è

$$\mathcal{G}_x(t) = e^{mt} e^{\sigma^2 t^2/2}. \quad (C.7.8)$$

Per la *distribuzione normale standard* con $m=0, \sigma=1$,

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}, \quad (C.7.9)$$

la funzione generatrice dei momenti assume la forma particolarmente semplice

$$\mathcal{G}_z(t) = e^{t^2/2}. \quad (C.7.10)$$

C.7.3 Funzione caratteristica

Applicando la definizione data dall'eq. (C.2.7) si può vedere che la **funzione caratteristica** della distribuzione normale è

$$\Phi_x(\omega) = e^{im\omega} e^{-\sigma^2\omega^2/2} = [\cos(m\omega) + i\sin(m\omega)] e^{-\sigma^2\omega^2/2}. \quad (C.7.11)$$

Per la *distribuzione normale standard* con $m=0, \sigma=1$, eq. (C.7.9), la funzione caratteristica assume la forma particolarmente semplice

$$\Phi_z(\omega) = e^{-\omega^2/2}. \quad (C.7.12)$$

C.8 Parametri della distribuzione di Lorentz

Vogliamo verificare la condizione di **normalizzazione** della distribuzione di Lorentz (o *distribuzione di Cauchy*), calcolando l'integrale

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma}{(x-\mu)^2 + \gamma^2} dx. \quad (C.8.1)$$

Allo scopo operiamo la sostituzione

$$t = \frac{x-\mu}{\gamma}; \quad x-\mu = \gamma t; \quad dx = \gamma dt; \quad (C.8.2)$$

è facile ora vedere che

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} dt = \frac{1}{\pi} \left[\lim_{a \rightarrow -\infty} \arctg t \Big|_a^0 \right] + \frac{1}{\pi} \left[\lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg t \Big|_0^b \right] = 1. \quad (C.8.3)$$

Cerchiamo ora di calcolare **valor medio**, utilizzando ancora le sostituzioni (C.8.2).

$$\langle x \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{\gamma}{(x-\mu)^2 + \gamma^2} = \frac{\gamma}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+1} dt + \frac{\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} dt \quad (C.8.4)$$

Nell'ultimo passaggio il secondo termine vale μ ; il primo termine invece

$$\frac{\gamma}{2\pi} \left[\lim_{a \rightarrow -\infty} \ln(t^2+1) \Big|_a^0 \right] + \frac{\gamma}{2\pi} \left[\lim_{b \rightarrow +\infty} \ln(t^2+1) \Big|_0^b \right] \quad (C.8.5)$$

è una forma indeterminata del tipo $-\infty + \infty$.

Per la distribuzione di Lorentz *la media non è definita*.

Consideriamo infine la **varianza**, utilizzando ancora le sostituzioni (C.8.2).

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \frac{\gamma}{(x-\mu)^2 + \gamma^2} = \frac{\gamma^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{t^2+1} dt \\ &= \frac{\gamma^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2+1-1}{t^2+1} dt = \frac{\gamma^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt - \frac{\gamma^2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} dt \end{aligned} \quad (C.8.6)$$

Il primo integrale dell'ultimo passaggio evidentemente diverge. Per la distribuzione di Lorentz *la varianza non è definita*.

C.9 Parametri della distribuzione di Maxwell-Boltzmann

Consideriamo la distribuzione di Maxwell delle velocità molecolari di un gas ideale:

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} v^2 \exp \left[-\frac{mv^2}{2kT} \right]. \quad (C.9.1)$$

Per verificare la normalizzazione e per calcolare valor medio e varianza facciamo le sostituzioni

$$t^2 = \frac{m}{2kT} v^2; \quad v = \sqrt{\frac{2kT}{m}} t; \quad dv = \sqrt{\frac{2kT}{m}} dt \quad (C.9.2)$$

e sfruttiamo la relazione

$$\int_0^{\infty} t^s e^{-t^2} dt = \underbrace{-\frac{1}{2} e^{-t^2} t^{s-1} \Big|_0^{\infty}}_{=0} + \frac{s-1}{2} \int_0^{\infty} t^{s-2} e^{-t^2} dt \quad (C.9.3)$$

corrispondente, a meno dell'estremo inferiore dell'integrale, all'eq. (C.7.5).

È facile vedere che l'**integrale di normalizzazione** vale 1:

$$\int_0^\infty f(v) dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^2 e^{-t^2} dt = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{4}. \quad (C.9.4)$$

Calcoliamo il **valor medio**:

$$\int_0^\infty v f(v) dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2kT}{m}} \int_0^\infty t^3 e^{-t^2} dt = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}. \quad (C.9.5)$$

Infine, per trovare la **varianza** D_v calcoliamo prima $\langle v^2 \rangle$:

$$\int_0^\infty v^2 f(v) dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{2kT}{m} \int_0^\infty t^4 e^{-t^2} dt = \frac{3kT}{m}, \quad (C.9.6)$$

da cui

$$D_v = \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2 = \frac{kT}{m} (3 - 8/\pi). \quad (C.9.7)$$

Appendice D

Tabelle

D.1 Alfabeto greco

<i>Nome</i>	<i>Minuscolo</i>	<i>Maiuscolo</i>	<i>Nome</i>	<i>Minuscolo</i>	<i>Maiuscolo</i>
alfa	α	A	ni (nu)	ν	N
beta	β	B	xi	ξ	Ξ
gamma	γ	Γ	omicron	o	O
delta	δ	Δ	pi	π	Π
epsilon	ϵ, ε	E	rho	ρ	P
zeta	ζ	Z	sigma	σ	Σ
eta	η	H	tau	τ	T
theta	θ, ϑ	Θ	upsilon	υ	Υ
iota	ι	I	phi	ϕ	Φ
kappa	κ	K	chi	χ	X
lambda	λ	Λ	psi	ψ	Ψ
mi (mu)	μ	M	omega	ω	Ω

D.2 Alcune costanti fondamentali della fisica

Alcune grandezze assumono particolare importanza nello studio della Fisica e vengono pertanto chiamate *costanti fisiche fondamentali*. Sono costanti fondamentali, ed esempio, la velocità della luce nel vuoto, la massa dell'elettrone, il numero di Avogadro.

I valori delle costanti fondamentali vengono continuamente misurati in differenti laboratori e con differenti tecniche. Un comitato internazionale, il CODATA (Committee on Data for Science and Technology), istituito nel 1966, raccoglie e confronta criticamente i risultati ottenuti dai vari laboratori. Periodicamente il CODATA pubblica un elenco dei *valori raccomandati* delle costanti fisiche fondamentali. Il primo elenco pubblicato dal CODATA risale al 1973.

Nella tabella seguente riportiamo i valori di alcune delle costanti fisiche fondamentali ricavati dalla compilazione del 1998 del CODATA.

Si noti che i valori delle prime tre costanti della tabella sono privi di incertezza, in quanto le tre costanti fanno parte del gruppo delle sette grandezze assunte dal S.I come grandezze di definizione nel 2018.

Per le rimanenti costanti, le incertezze assolute sono espresse in una forma particolarmente adatta a misure molto accurate. Le cifre significative che esprimono l'incertezza δX (generalmente 2) sono scritte tra parentesi immediatamente dopo il valore centrale X_0 ; si sottintende che l'incertezza va applicata alle corrispondenti ultime cifre significative del valore centrale X_0 . Ad esempio, per la massa dell'elettrone

$$m_e = 9.10938188(72) \cdot 10^{-31} \text{kg sta per } m_e = (9.10938188 \pm 0.00000054) \cdot 10^{-31} \text{kg}$$

<i>Constant</i>	<i>Symbol</i>	<i>Value</i>	<i>Unit</i>
Speed of light in vacuum	c	299 792 458	m s^{-1}
Vacuum permeability	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$	H m^{-1}
Vacuum permittivity	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8.854 187 817 \dots \cdot 10^{-12}$	F m^{-1}
Gravitational constant	G	$6.673(10) \cdot 10^{-11}$	$\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$
Planck constant	h	$6.626 068 76(52) \cdot 10^{-34}$	J s
Elementary charge	e	$1.602 176 462(63) \cdot 10^{-19}$	C
Electron mass	m_e	$9.109 381 88(72) \cdot 10^{-31}$	kg
Proton mass	m_p	$1.672 621 58(13) \cdot 10^{-27}$	kg
Neutron mass	m_n	$1.674 927 16(13) \cdot 10^{-27}$	kg
Atomic mass unit	u	$1.660 538 73(13) \cdot 10^{-27}$	kg
Fine structure constant	α	$7.297 352 533(27) \cdot 10^{-3}$	
Rydberg constant	R_∞	$109 73731.568 549(83)$	m^{-1}
Bohr radius	a_0	$0.529 177 2083(19) \cdot 10^{-10}$	m
Bohr magneton	μ_B	$927.400 899(37) \cdot 10^{-26}$	J T^{-1}
Nuclear magneton	μ_N	$5.050 783 17(20) \cdot 10^{-27}$	J T^{-1}
Avogadro number	N_A	$6.022 141 99(47) \cdot 10^{23}$	mol^{-1}
Faraday constant	F	$96 485.3415(39)$	C mol^{-1}
Molar gas constant	R	$8.314 472(15)$	$\text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$
Boltzmann constant	k_B	$1.380 6503(24) \cdot 10^{-23}$	J K^{-1}

D.3 Integrali della distribuzione normale standard

Vogliamo calcolare la probabilità che una variabile aleatoria x , distribuita normalmente con valor medio m e scarto quadratico medio σ , abbia valore compreso tra $x = \alpha$ e $x = \beta$:

$$\mathcal{P}(\alpha < x < \beta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right] dx. \quad (D.3.1)$$

Come abbiamo già visto al § 6.5.C, il calcolo è semplificato se si introduce la *variabile normale standardizzata* z

$$z = \frac{x-m}{\sigma}, \quad (D.3.2)$$

che rappresenta lo scarto della variabile x rispetto al valor medio m , misurato in unità σ . La distribuzione della variabile standardizzata z

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] \quad (D.3.3)$$

si chiama *densità normale standard*.

Una volta operata la sostituzione degli estremi d'integrazione

$$\alpha \rightarrow z_\alpha = \frac{\alpha-m}{\sigma}, \quad \beta \rightarrow z_\beta = \frac{\beta-m}{\sigma}, \quad (D.3.4)$$

il calcolo delle probabilità si riduce a

$$\mathcal{P}(\alpha < x < \beta) = \mathcal{P}(z_\alpha < z < z_\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_\alpha}^{z_\beta} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dt. \quad (D.3.5)$$

La valutazione dell'integrale nell'eq. (D.3.5) viene fatta ricorrendo a valori tabulati.

Nelle pagine seguenti riportiamo due tabelle (tra di loro equivalenti) di integrali della densità normale standard:

a) **Tabella D.3.1:**

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left[-\frac{z'^2}{2}\right] dz' \tag{D.3.6}$$

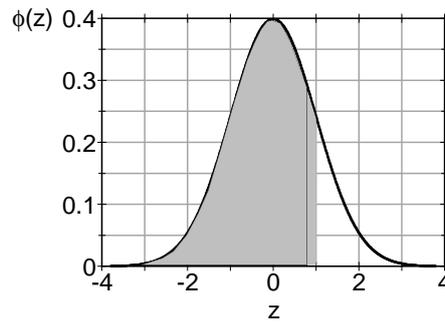
b) **Tabella D.3.2:**

$$\Phi^*(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z \exp\left[-\frac{z'^2}{2}\right] dz' \tag{D.3.7}$$

In entrambe le tabelle, la prima colonna riporta le prime due cifre significative della variabile z , la prima riga riporta la terza cifra significativa. Il corpo della tabella contiene i corrispondenti valori di probabilità.

Tabella D.3.1

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \phi(z') dz'$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3.8	0.0001									
-3.6	0.0002									
-3.4	0.0003									
-3.2	0.0007									
-3.0	0.0014									
-2.9	0.0019									
-2.8	0.0026									
-2.7	0.0035									
-2.6	0.0047									
-2.5	0.0062									
-2.4	0.0082									
-2.3	0.0107									
-2.2	0.0139									
-2.1	0.0179									
-2.0	0.0228									
-1.9	0.0288	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.0	0.1587	0.1563	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379

D.4 Integrali della distribuzione di Student

Come abbiamo visto al § 7.4.D, se si campiona N volte una variabile X , la probabilità β che un intervallo di semi-larghezza $k\tilde{\sigma}[m^*]$ centrato sulla media campionaria m^* contenga la media di popolazione m è detto limite di confidenza relativo al fattore di copertura k

$$\beta = \mathcal{P}\{|m - m^*| < k\tilde{\sigma}[m^*]\}.$$

Se la variabile X è distribuita normalmente, il fattore di copertura k corrisponde alla variabile aleatoria t distribuita secondo la distribuzione di Student a $\nu = N - 1$ gradi di libertà, cosicché il limite di confidenza può essere calcolato integrando la distribuzione di Student $S_\nu(t)$:

$$\beta = 2 \int_0^t S_\nu(t') dt'.$$

Tabella D.4.1

Il corpo della tabella riporta i valori dei limiti *percentuali* di confidenza β corrispondenti a selezionati valori della variabile t (prima riga) e del numero di gradi di libertà ν (prima colonna). Il valore $t=1$ corrisponde all'incertezza tipo, misurata dalla stima dello scarto tipo delle medie campionarie $\delta X = \tilde{\sigma}[m^*]$. L'ultima riga, $\nu = \infty$, corrisponde al caso limite in cui la distribuzione di Student $S(t)$ si confonde con la distribuzione normale standardizzata $\phi(z)$.

$t \rightarrow$	1	1.5	2	2.5	3
$\nu = 1$	50.00	62.57	70.48	75.78	79.52
$\nu = 2$	57.74	72.76	81.65	87.04	90.45
$\nu = 3$	60.90	76.94	86.07	91.23	94.23
$\nu = 4$	62.61	79.20	88.39	93.32	96.01
$\nu = 5$	63.68	80.61	89.81	94.55	96.99
$\nu = 6$	64.41	81.57	90.76	95.35	97.60
$\nu = 7$	64.94	82.27	91.44	95.90	98.01
$\nu = 8$	65.34	82.80	91.95	96.31	98.29
$\nu = 9$	65.66	83.21	92.34	96.61	98.50
$\nu = 10$	65.91	83.55	92.66	96.86	98.67
$\nu = 15$	66.68	84.56	93.61	97.55	99.10
$\nu = 20$	67.07	85.08	94.07	97.88	99.29
$\nu = 30$	67.47	85.59	94.54	98.19	99.46
$\nu = 40$	67.67	85.85	94.77	98.34	99.54
$\nu = 50$	67.79	86.01	94.91	98.43	99.58
$\nu = 100$	68.03	86.32	95.18	98.60	99.66
$\nu = \infty$	68.27	86.64	95.45	98.76	99.73

Tabella D.4.2

Il corpo della tabella riporta i valori della variabile t , cioè del fattore di copertura, corrispondenti a selezionati valori del limite di confidenza β (prima riga) espressi in percentuale e del numero di gradi di libertà ν (prima colonna). L'ultima riga, $\nu = \infty$, corrisponde al caso limite in cui la distribuzione di Student $S(t)$ si confonde con la distribuzione normale standardizzata $\phi(z)$. Il limite di confidenza $\beta = 50\%$ corrisponde al cosiddetto *errore probabile*. I limiti di confidenza $\beta = 68.27\%$, 95.45% e 99.73% corrispondono, nel caso limite $\nu = \infty$ della distribuzione normale, a fattori di copertura rispettivamente $k = 1, 2$ e 3 .

β (%) \rightarrow	50	68.27	90	95	95.45	99	99.73
$\nu = 1$	1.000	1.84	6.31	12.71	13.97	63.66	235.80
$\nu = 2$	0.816	1.32	2.92	4.30	4.53	9.92	19.21
$\nu = 3$	0.765	1.20	2.35	3.18	3.31	5.84	9.22
$\nu = 4$	0.741	1.14	2.13	2.78	2.87	4.60	6.62
$\nu = 5$	0.727	1.11	2.02	2.57	2.65	4.03	5.51
$\nu = 6$	0.718	1.09	1.94	2.45	2.52	3.71	4.90
$\nu = 7$	0.711	1.08	1.89	2.36	2.43	3.50	4.53
$\nu = 8$	0.706	1.07	1.86	2.31	2.37	3.36	4.28
$\nu = 9$	0.703	1.06	1.83	2.26	2.32	3.25	4.09
$\nu = 10$	0.700	1.05	1.81	2.23	2.28	3.17	3.96
$\nu = 15$	0.691	1.03	1.75	2.13	2.18	2.95	3.59
$\nu = 20$	0.687	1.03	1.72	2.09	2.13	2.85	3.42
$\nu = 30$	0.683	1.02	1.70	2.04	2.09	2.75	3.27
$\nu = 40$	0.681	1.01	1.68	2.02	2.06	2.70	3.20
$\nu = 50$	0.680	1.01	1.68	2.01	2.05	2.68	3.16
$\nu = 100$	0.678	1.005	1.660	1.98	2.02	2.63	3.08
$\nu = \infty$	0.674	1.000	1.645	1.96	2.00	2.58	3.00

D.5 Integrali della distribuzione del chi quadrato

Il *chi quadrato* (χ^2) è una variabile aleatoria continua che si ottiene addizionando un numero qualsiasi ν di variabili aleatorie normali standardizzate Z elevate al quadrato §7.6):

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{\nu} Z^2. \quad (D.5.1)$$

Il numero ν di addendi è detto numero dei *gradi di libertà*.

Il *chi quadrato ridotto* ($\tilde{\chi}^2$) è la variabile aleatoria che si ottiene dividendo χ^2 per il numero ν di gradi di libertà

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{\nu} = \frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^{\nu} Z^2. \quad (D.5.2)$$

Per ogni valore intero di ν è possibile calcolare la distribuzione sia del chi quadrato χ^2 che del chi quadrato ridotto $\tilde{\chi}^2$. La densità di probabilità $f_{\nu}(\chi^2)$ è data dalla formula

$$f_{\nu}(\chi^2) = \frac{1}{2^{\nu/2} \Gamma(\nu/2)} (\chi^2)^{\nu/2-1} \exp[-\chi^2/2] \quad (D.5.3)$$

in cui compare la *funzione* Γ definita nel seguente modo:

per n intero, $\Gamma(n+1) = n!$

per n semintero, $\Gamma(n+1/2) = (2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1 \sqrt{\pi}/2^n$

Nelle Fig. 7.6.1 e 7.6.2 sono mostrate le distribuzioni del χ^2 e del $\tilde{\chi}^2$ per diversi valori del parametro ν .

Nella Tabella D.5.1 sono riportati i valori dell'integrale, relativo alla distribuzione del chi quadrato ridotto,

$$\int_{\tilde{\chi}_0^2}^{\infty} G_{\nu}(\tilde{\chi}^2) d\tilde{\chi}^2 = \mathcal{P} [\tilde{\chi}^2 > \tilde{\chi}_0^2]. \quad (D.5.4)$$

Per comodità di lettura i valori sono riportati sotto forma di *probabilità percentuale*.

A titolo di esempio, la Fig. D.5.1 illustra il significato dell'eq. (D.5.4) per $\nu = 5$ gradi di libertà e $\tilde{\chi}_0^2 = 0.8$. L'integrale misura l'area sottesa dalla densità di probabilità per $\tilde{\chi}^2 \geq \tilde{\chi}_0^2$ (area tratteggiata nel grafico di sinistra), corrispondente al valore del complemento a 1 della funzione di distribuzione cumulativa per $\tilde{\chi}^2 = \tilde{\chi}_0^2$ (grafico di destra).

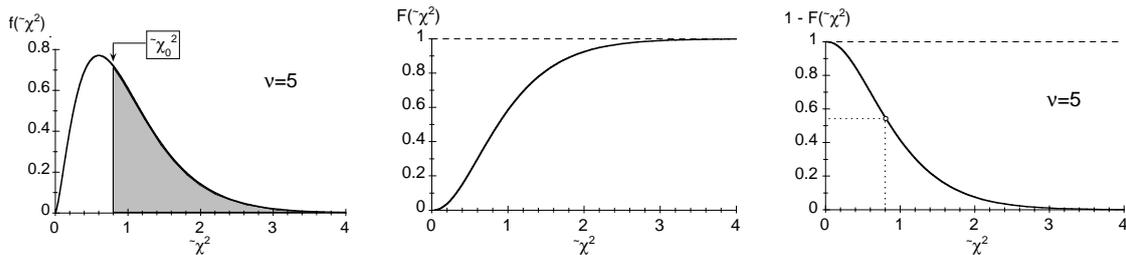


Figura D.1: Distribuzione del chi quadrato ridotto per $\nu = 5$. A sinistra la densità di probabilità $f(\tilde{\chi}^2)$, al centro la funzione di distribuzione cumulativa $F(\tilde{\chi}^2)$, a destra $1 - F(\tilde{\chi}^2)$.

Tabella D.5.1

Probabilità percentuali che il valore del chi quadrato ridotto $\tilde{\chi}^2$ sia maggiore di un valore $\tilde{\chi}_0^2$ sperimentalmente osservato.

Ogni riga delle tabelle si riferisce ad un dato valore del numero di gradi di libertà ν , riportato nella prima colonna. Ogni colonna si riferisce ad un valore del chi quadrato ridotto osservato $\tilde{\chi}_0^2$, riportato nella prima riga. Il corpo delle tabelle riporta i corrispondenti valori di probabilità percentuali:

$$100 \cdot \int_{\tilde{\chi}_0^2}^{\infty} f_{\nu}(\tilde{\chi}^2) d\tilde{\chi}^2 = 100 \cdot \mathcal{P} [\tilde{\chi}^2 > \tilde{\chi}_0^2]$$

$\tilde{\chi}_0^2 \rightarrow$	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	8.0	10.0
$\nu=1$	100	48	32	22	16	11	8.3	6.1	4.6	3.4	2.5	1.9	1.4	0.5	0.2
$\nu=2$	100	61	37	22	14	8.2	5.0	3.0	1.8	1.1	0.7	0.4	0.2		
$\nu=3$	100	68	39	21	11	5.8	2.9	1.5	0.7	0.4	0.2	0.1			
$\nu=4$	100	74	41	20	9.2	4.0	1.7	0.7	0.3	0.1	0.1				
$\nu=5$	100	78	42	19	7.5	2.9	1.0	0.4	0.1						

$\tilde{\chi}_0^2 \rightarrow$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
$\nu=1$	100	65	53	44	37	32	27	24	21	18	16	14	12	11	9.4	8.3
$\nu=2$	100	82	67	55	45	37	30	25	20	17	14	11	9.1	7.4	6.1	5.0
$\nu=3$	100	90	75	61	49	39	31	24	19	14	11	8.6	6.6	5.0	3.8	2.9
$\nu=4$	100	94	81	66	52	41	31	23	17	13	9.2	6.6	4.8	3.4	2.4	1.7
$\nu=5$	100	96	85	70	55	42	31	22	16	11	7.5	5.1	3.5	2.3	1.6	1.0
$\nu=6$	100	98	88	73	57	42	30	21	14	9.5	6.2	4.0	2.5	1.6	1.0	0.6
$\nu=7$	100	99	90	76	59	43	30	20	13	8.2	5.1	3.1	1.9	1.1	0.7	0.4
$\nu=8$	100	99	92	78	60	43	29	19	12	7.2	4.2	2.4	1.4	0.8	0.4	0.2
$\nu=9$	100	99	94	80	62	44	29	18	11	6.3	3.5	1.9	1.0	0.5	0.3	0.1
$\nu=10$	100	100	95	82	63	44	29	17	10	5.5	2.9	1.5	0.8	0.4	0.2	0.1
$\nu=11$	100	100	96	83	64	44	28	16	9.1	4.8	2.4	1.2	0.6	0.3	0.1	0.1
$\nu=12$	100	100	96	84	65	45	28	16	8.4	4.2	2.0	0.9	0.4	0.2	0.1	
$\nu=13$	100	100	97	86	66	45	27	15	7.7	3.7	1.7	0.7	0.3	0.1	0.1	
$\nu=14$	100	100	98	87	67	45	27	14	7.1	3.3	1.4	0.6	0.2	0.1		
$\nu=15$	100	100	98	88	68	45	26	14	6.5	2.9	1.2	0.5	0.2	0.1		
$\nu=16$	100	100	98	89	69	45	26	13	6.0	2.5	1.0	0.4	0.1			
$\nu=17$	100	100	99	90	70	45	25	12	5.5	2.2	0.8	0.3	0.1			
$\nu=18$	100	100	99	90	70	46	25	12	5.1	2.0	0.7	0.2	0.1			
$\nu=19$	100	100	99	91	71	46	25	11	4.7	1.7	0.6	0.2	0.1			
$\nu=20$	100	100	99	92	72	46	24	11	4.3	1.5	0.5	0.1				
$\nu=22$	100	100	99	93	73	46	23	10	3.7	1.2	0.4	0.1				
$\nu=24$	100	100	100	94	74	46	23	9.2	3.2	0.9	0.3	0.1				
$\nu=26$	100	100	100	95	75	46	22	8.5	2.7	0.7	0.2					
$\nu=28$	100	100	100	95	76	46	21	7.8	2.3	0.6	0.1					
$\nu=30$	100	100	100	96	77	47	21	7.2	2.0	0.5	0.1					

D.6 Integrali della distribuzione del coefficiente di correlazione

Il coefficiente di correlazione lineare r relativo ad un numero N di coppie di valori (x_j, y_j) è calcolato (si veda il § 7.8) come:

$$r = \frac{\sum(x_j - m_x^*)(y_j - m_y^*)}{\sqrt{\sum(x_i - m_x^*)^2} \sqrt{\sum(y_j - m_y^*)^2}} \quad (D.6.1)$$

Per due grandezze completamente scorrelate, è possibile calcolare la distribuzione della variabile aleatoria r . Mediante integrazione, si può quindi determinare la probabilità

$$P_N (|r| \geq |r_o|)$$

che, per una coppia di grandezze X e Y completamente scorrelate, il modulo del coefficiente di correlazione r sia maggiore del modulo di r_o .

La probabilità si calcola mediante l'integrale

$$P_N (|r| \geq |r_o|) = \frac{2\Gamma[(N-1)/2]}{\sqrt{\pi}\Gamma[(N-2)/2]} \int_{|r_o|}^1 (1-r^2)^{(N-4)/4} dr$$

in cui compare la *funzione* Γ definita nel seguente modo:

per n intero, $\Gamma(n+1) = n!$

per n semintero, $\Gamma(n+1/2) = (2n-1)(2n-3) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1 \sqrt{\pi}/2^n$

Nella Tabella D.6.1 sono riportati alcuni valori dell'integrale.

Tabella D.6.1

La tabella riporta le probabilità percentuali che, per un prefissato numero N di osservazioni, il coefficiente di correlazione r per due variabili completamente scorrelate sia in modulo maggiore del coefficiente di correlazione osservato r_o ,

$$P_N (|r| \geq |r_o|).$$

$ r_o \rightarrow$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$N=3$	100	94	87	81	74	67	59	51	41	29	0
$N=4$	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0
$N=5$	100	87	75	62	50	39	28	19	10	3.7	0
$N=6$	100	85	70	56	43	31	21	12	5.6	1.4	0
$N=7$	100	83	67	51	37	25	15	8.0	3.1	0.6	0
$N=8$	100	81	63	47	33	21	12	5.3	1.7	0.2	0
$N=9$	100	80	61	43	29	17	8.8	3.6	1.0	0.1	0
$N=10$	100	78	58	40	25	14	6.7	2.4	0.5		0
$N=11$	100	77	56	37	22	12	5.1	1.6	0.3		0
$N=12$	100	76	53	34	20	9.8	3.9	1.1	0.2		0
$N=13$	100	75	51	32	18	8.2	3.0	0.8	0.1		0
$N=14$	100	73	49	30	16	6.9	2.3	0.5	0.1		0
$N=15$	100	72	47	28	14	5.8	1.8	0.4			0
$N=16$	100	71	46	26	12	4.9	1.4	0.3			0
$N=17$	100	70	44	24	11	4.1	1.1	0.2			0
$N=18$	100	69	43	23	10	3.5	0.8	0.1			0
$N=19$	100	68	41	21	9.0	2.9	0.7	0.1			0
$N=20$	100	67	40	20	8.1	2.5	0.5	0.1			0
$N=25$	100	63	34	15	4.8	1.1	0.2				0
$N=30$	100	60	29	11	2.9	0.5					0
$N=35$	100	57	25	8.0	1.7	0.2					0
$N=40$	100	54	22	6.0	1.1	0.1					0
$N=45$	100	51	19	4.5	0.6						0

Appendice E

Bibliografia

Testi didattici di sperimentazione fisica

- E. Pancini: *Misure ed apparecchi di fisica*, Veschi (1965).
- E. Ricamo: *Guida alle sperimentazioni di fisica*, Ambrosiana (1968).
- M. Bertolotti, T. Papa, D. Sette: *Metodi di osservazione e misura*, Veschi (1978).
- M. Severi: *Introduzione alla sperimentazione fisica*, CISU (1979).
- M. Caporaloni, S. Caporaloni, R. Ambrosini: *La misura e la valutazione della sua incertezza nella fisica sperimentale*, Zanichelli (1987).
- P. Fornasini: *The uncertainty in physical measurements*, Springer (2008).

Generalità sulla misurazione fisica

- M. Cunietti: *Le misure e il loro trattamento*, clup (1977).
- Enciclopedia della Scienza e della Tecnica (Mondadori), alle voci: *Metodi scientifici* di L. Geymonat e *Misurazione fisica* di E. Vinassa de Regny.
- Norma UNI-CEI 9: *Guida all'espressione dell'incertezza di misura*, UNI-CEI (1997).

Sistemi di unità di misura. Costanti fondamentali della Fisica.

- E.A. Cohen, K.M. Crowe, J.W.M. Dumond: *The fundamental constants of Physics*, Interscience Publishers (1957). [Testo introduttivo, anche se non aggiornato, alle tecniche statistiche usate per determinare il valore delle costanti fisiche fondamentali. Contiene dettagli storicamente interessanti.]
- A. Ferraro: *Dizionario di metrologia generale*, Zanichelli (1965). [Contiene un repertorio molto vasto di grandezze fisiche e di unità di misura anche di interesse storico. È aggiornato solo fino al 1965.]
- M. Fazio: *SI, MKSA, CGS e Co: Dizionario e manuale delle unità di misura*, Zanichelli (1995). [È un manuale di riferimento aggiornato sul S.I. e su altri sistemi in uso comune. Contiene un'introduzione al calcolo dimensionale.]
- J.D. Jackson: *Elettrodinamica classica*, Zanichelli (1984). [L'appendice sulle unità di misura e sulle dimensioni a pag. 736 è illuminante per chiarire la relazione tra sistema c.g.s. di Gauss e S.I.]
- M. Fazio: *I campioni di unità di misura*, Le Scienze **31** (1971), pag. 40. [Contiene un'introduzione elementare alle problematiche relative ai campioni di unità di misura.]
- R.A. Nelson: *Foundations of the international system of units (SI)*, The Physics Teacher, December 1981, pag. 596. [Contiene una breve storia dello sviluppo del S.I., aggiornata al 1981.]

Generalità sugli strumenti di misura

- A. Drigo, G. Allocco: *Fisica Pratica*, Zannoni (1939). [Contiene un repertorio notevole di strumenti classici e tabelle. È ovviamente molto datato.]
- Norma UNI 4546: *Strumenti di misura: termini e definizioni*
- M. Bassière, E. Gaignebet: *Metrologie générale*, Dunod (1966).
- E. Arri, S. Sartori (a cura di): *Le misure di grandezze fisiche*, Paravia (1984).

Probabilità e statistica

- H. Ventsel: *Teoria delle probabilità*, MIR. [È un testo particolarmente curato dal punto di vista didattico.]
- A. Papoulis: *Probabilità, variabili aleatorie e processi stocastici*, Boringhieri (1973). [Testo classico di introduzione alla teoria delle probabilità.]
- B. Gnedenko: *The theory of probability*, MIR publishers (1975). [Presenta i fondamenti della teoria della probabilità a livello accessibile ad uno studente universitario di facoltà scientifiche.]
- B. de Finetti: *La logica dell'incerto*, Il Saggiatore (1989). [Raccoglie alcuni saggi introduttivi alla definizione soggettiva di probabilità.]
- M.R. Spiegel: *Probabilità e statistica*, Mc Graw Hill Libri Italia (1994). [Presenta in modo succinto i concetti fondamentali della teoria delle probabilità e della statistica. Contiene un gran numero di esercizi risolti e non.]
- A. Rotondi, P. Pedroni, A. Pievatolo: *Probabilità, statistica e simulazione*, Springer (2001). [Presenta in modo didattico gli aspetti basilari del calcolo delle probabilità e gli elementi di statistica utili all'analisi dei dati in Fisica.]

Analisi statistica dei dati sperimentali

- H.D. Young: *Elaborazione statistica dei dati sperimentali*, Veschi (1964) [Testo molto introduttivo, oggi un po' datato].
- A.G. Worthing, J. Geffner: *Elaborazione dei dati sperimentali*, Ambrosiana, Milano (1965) [Contiene molte informazioni ed esempi utili, anche se un po' datato].
- O.Kemphorne and L. Folks: *Probability, statistics and data analysis*, Ames (1971).
- D. Taupin: *Probabilities, data reduction and error analysis in the physical sciences*, Les éditions de Physique (1988) [Testo di approfondimento critico] .
- P.R. Bevington and D.K. Robinson: *Data reduction and error analysis for the physical sciences*, Mc Graw Hill Int. Ed. (1994) [Testo molto diffuso, particolarmente utile per le applicazioni del metodo dei minimi quadrati].
- J.L. Stanford, S.B. Vardeman (a cura di): *Statistical Methods for Physical Science* - vol. 28 della collana *Methods of Experimental Physics*, Academic Press (1994) [Testo di riferimento per fisici sperimentali].
- C. Cametti, A. Di Biasio: *Introduzione all'analisi dei dati sperimentali*, CISU (1994) [Testo didattico con approfondimenti di probabilità e statistica].
- J.R. Taylor: *Introduzione all'analisi degli errori*, Zanichelli (2000) [Testo didattico introduttivo alla problematica dell'incertezza di misura e alle principali tecniche di analisi dati].

Indirizzi internet

- UNI, Ente Nazionale Italiano di Unificazione: <https://www.uni.com/>
- Istituto Nazionale di Ricerca Metrologica (INRIM), Torino: <https://www.inrim.it/it>
- BIPM, Bureau International des Poids et Mesures: <https://www.bipm.org/en/>
- ISO, International Organisation for Standardization: <http://www.iso.ch>

- NIST, National Institute of Standards and Technology (USA): <http://www.nist.gov>

